ОБЪ ОДНОМЪ ЧАСТНОМЪ ЗАКОНѢ

ПОГЛОЩЕНІЯ СВѢТА.

А. П. Грузинцева.

Когда свѣтъ проходитъ черезъ средину, поглощающую лучи той или другой преломляемости, то между свойствами средины и родомъ поглощаемыхъ лучей должна существовать нѣкоторая опредѣленная зависимость. Это очевидно à priori. Средина можетъ характеризоваться различными качествами, равно какъ и свѣтовой лучъ, проходящій черезъ нее. Въ настоящей замѣткѣ мы имѣемъ намѣреніе обратить вниманіе на одинъ частный законъ, относящійся къ поглощенію свѣта срединой, съ опредѣленною поглощательною способностью. Пусть дана средина, поглощающая лучи опредѣленной преломляемости, соотвѣтствующей длинѣ волны, которую мы обозначимъ буквой

$$\lambda_m.$$

Если назовемъ массу единицы объема, т. е. плотность поглощающей средины, буквой

$$m,$$

то законъ, о которомъ говоримъ, выразится въ слѣдующей формѣ:

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m,$$

причемъ

$$\alpha \text{ и } \beta$$

суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, характеризующіе средину. Законъ этотъ теоретически вытекаетъ изъ тѣхъ общихъ взглядовъ на свѣторазсѣяніе (дисперсію), которые принимаются нынѣ физиками, и можетъ быть полученъ изъ формулъ, которыя развиты въ моей теоріи дисперсіи, данной въ 1882 году въ «Сообщеніяхъ» харьк. матем. общества. Для вывода этого закона я предварительно приведу нужныя для того формулы и, пользуясь случаемъ, дамъ имъ нѣсколько бо́льшее развитіе, чѣмъ это сдѣлано въ упомянутой моей статьѣ.

Основныя уравненія движенія въ поглощающей срединѣ, приведенныя въ моей статьѣ «О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ»[1], и дадутъ, по подстановкѣ значеній входящихъ въ нихъ составляющихъ колебанія эфирной и матеріальной частицы, основныя уравненія настоящей замѣтки.

Положимъ:

$$H_1 = S h_x{}^2 A^2,\ h_x{}^2 = \frac{\varkappa_x}{2\pi c_0 \mu},\ \alpha_x = m_x \sqrt{\frac{m}{\mu}},\ a_1 = S \alpha_x{}^2 A^2,$$

$$g_x = \frac{1}{2\pi c_0}\sqrt{\frac{\delta_x}{\mu}},\ G_1 = S g_x{}^2 A^2.$$

Тогда

$$S\frac{F_1 A^2 \nu^2}{4\pi^2 c_0{}^2 \mu} = S\,\frac{A^2}{4\pi^2 c_0{}^2\mu}\left\{\beta_x{}^{(0)} + \beta_x{}^{(1)} N^2 + \beta_x{}^{(2)} N^4 + \ldots\right\} =$$

$$= S\,A^2\left\{\frac{\beta_x{}^{(0)}}{4\pi^2 c_0{}^2\mu} - \frac{\beta_x{}^{(1)}\nu^2}{c_0{}^2\mu\lambda^2} + \frac{4\pi^2\beta_x{}^{(2)}\nu^4}{c_0{}^2\mu\lambda^4} - \ldots\ldots\right\}.$$

---

[1] «Сообщенія» харьк. матем. общества за 1882 г. кн. 1, стр. 77, уравненія 2, или стр. 73 отдѣльно изданной брошюры подъ тѣмъ-же заглавіемъ.

Значенія входящихъ здѣсь количествъ объяснены въ упомянутой статьѣ.

Если далѣе положимъ:

$$b_1 = S\frac{\beta_x^{(0)} A^2}{4\pi^2 c_0^2\mu},\ c_1 = -S\frac{\beta_x^{(1)} A^2}{c_0^2\mu}, \ldots,$$

то

$$S\frac{F_1 A^2 \nu^2}{4\pi^2 c_0^2\mu} = \left(b_1 + \frac{c_1}{\lambda^2}N^2 + \frac{\partial_1}{\lambda^4}N^4 + \ldots\right)\nu^2$$

или еще

$$S\frac{F_1 A^2 \nu^2}{4\pi^2 c_0^2\mu} = \left\{b_1 + \frac{b^{(1)}}{\lambda^2}N^2 + \frac{b^{(2)}}{\lambda^4}N^4 + \ldots\right\}\nu^2, \qquad (1)$$

гдѣ

$$b^{(i)} = \frac{(2\pi)^{2i-2}(-1)^i}{c_0^2\mu} S\beta_x^{(i)} A^2.$$

Если подставимъ въ формулу (1) значеніе N, т. е.

$$K + \frac{q}{c}\sqrt{-1},$$

причемъ K пропорціонально коэффиціенту поглощенія средины, какъ это объяснено въ упомянутой статьѣ, равно какъ тамъ же объяснено значеніе q и c*, тогда получимъ:

$$S\frac{F_1 A^2 \nu^4}{4\pi^2 c_0^2\mu} = \left\{b_1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} c^{(i)}\frac{\nu^2 i}{\lambda^{2i}}\right\}\nu^2 \qquad (2)$$

причемъ положено

$$c^{(i)} = \frac{(2\pi)^{4i-2}}{(c_0\sqrt{\mu})^2} S\beta_x^{(i)} A^2. \qquad (a)$$

* Въ упоминаемой статьѣ $\sqrt{-1}$ обозначенъ извѣстнымъ символомъ: i.

Подставляя значенie количествъ, входящихъ въ другie члены упомянутыхъ уравненiй, найдемъ:

$$a_1 = S\alpha_x{}^2 A^2 = S\frac{m}{\mu} A^2 m_x{}^2\,,$$

но

$$m_x = \gamma_x + \sum_{i=1}^{i=\infty} \gamma_x{}^{(i)} N^{2i}$$

и такъ какъ

$$N^{2i} = (2\pi)^{2i} (-1)^i \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{2i},$$

т. е.

$$a_1 = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^{(i)}}{\lambda^{2i}}\,\nu^{2i},$$

гдѣ

$$a_0 = \frac{m}{\mu}\partial_0\,,\ a^{(i)} = \frac{m}{\mu}\partial^{(i)}. \qquad \text{(b)}$$

Замѣтимъ, что коэффицiенты $\partial^{(i)}$ зависятъ отъ взаимодѣйствiя между эфирными и матерiальными частицами.

Теперь всѣ члены упомянутыхъ уравненiй вычислены и мы получимъ:

$$-1 - a_0 - \nu^2 \frac{a^{(1)}}{\lambda^2} - \nu^4 \frac{a^{(2)}}{\lambda^4} - \ldots = -\nu^2 + \lambda^2 G_1 + \lambda H_1 \sqrt{-1}$$

$$- b_1 \nu^2 - c^{(1)} \frac{\nu^4}{\lambda^4} - c^{(2)} \frac{\nu^6}{\lambda^6} - \ldots$$

или:

$$\nu^2(1+b_1)-1=a_0+G_1\lambda^2+a^{(1)}\frac{\nu^2}{\lambda^2}+\left(a^{(2)}-c^{(1)}\right)\frac{\nu^4}{\lambda^4}+$$

$$+\left(a^{(3)}-c^{(2)}\right)\frac{\nu^6}{\lambda^6}+\ldots+H_1\lambda\sqrt{-1}=$$

$$=a_0+G_1\lambda^2+\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(a^{(i)}-c^{(i-1)}\right)\frac{\nu^{2i}}{\lambda^{2i}}+H_1\lambda\sqrt{-1} \quad (3)$$

при условіи

$$c^{(0)}=0.$$

Уравненія (a) и (b) показываютъ, что коэффиціенты $a^{(i)}$ пропорціональны плотности поглощающей средины и зависятъ отъ колебаній матеріальныхъ частицъ, а коэффиціенты $c^{(i)}$ — отъ измѣненія упругости эфира подъ вліяніемъ матеріальныхъ частицъ; количество G_1 — отъ сопротивленія матеріальныхъ частицъ и H_1 — отъ тренія; a_0 зависитъ отъ того-же, отъ чего зависятъ $a^{(i)}$; b_1 — отъ того, отъ чего $b^{(i)}$.

Положимъ теперь

$$f^{(i)}=a^{(i)}-c^{(i-1)} \quad (c)$$

тогда

$$\nu^2(1+b_1)-1=a_0+G_1\lambda^2+H_1\lambda\sqrt{-1}+\sum_{i=1}^{i=\infty}f^{(i)}\frac{\nu^{2i}}{\lambda^{2i}}.$$

Пусть

$$\frac{a_0}{1+b_1}=a-\varepsilon,\ \frac{G_1}{1+b_1}=G,\ \frac{H_1}{1+b_1}=H,\ \frac{f^{(i)}}{1+b_1}=D_i$$

и

$$\frac{1}{1+b_1}=1+\varepsilon$$

или, другими словами, возьмемъ вмѣсто b_1 и a_0 новыя количества ε и a, такъ что будетъ:

$$b_1 = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},\ a_0 = \frac{a-\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

тогда:

$$\nu^2 - 1 = a + G\lambda^2 + H\lambda\sqrt{-1} + \sum_{i=1}^{i=\infty} D_i \frac{\nu^{2i}}{\lambda^{2i}} \ldots \quad \text{(A)}$$

Это есть формула (3) стр. 73 цитированной выше статьи (стр. 77 «Сообщеній» Х. М. О. 1882, I).

Займемся теперь дальнѣйшими преобразованіями формулы (A).

Мы знаемъ, что

$$\nu = n + p\sqrt{-1},$$

гдѣ n показатель преломленія средины, а p коэффиціентъ поглощенія; слѣдовательно

$$\nu^{2i} = \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1},$$

гдѣ

$$a_{2h,i} = \frac{2i(2i-1)\ldots(2i-2h+1)}{1.2.3.\ldots 2h}$$

и

$$a_{0,i} = 1, \quad a_{2i,i} = 1;$$

также

$$a_{2h+1,i} = \frac{2i(2i-1)\ldots(2i-2h)}{1.2.3.\ldots(2h+1)}$$

$$a_{1,i} = 2i, \qquad a_{2i+1,i} = 0.$$

При помощи этихъ выраженій формула (A) превращается въ слѣдующую:

$$n^2 - p^2 - 1 + 2np\sqrt{-1} = a + G\lambda^2 + H\lambda\sqrt{-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h \Big(a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+ \sqrt{-1}\, a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \Big) = a + G\lambda^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+ \sqrt{-1} \left\{ H\lambda + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \right\}.$$

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, найдемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} \qquad \text{(I)}$$

$$2np = H\lambda + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \qquad \text{(II)}$$

или

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i R_i}{\lambda^{2i}} \qquad \text{(I bis)}$$

$$2np = H\lambda + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i S_i}{\lambda^{2i}}\,; \qquad \text{(II bis)}$$

если ради краткости письма положимъ:

$$R_i = \sum_{n=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h\,,\,i}\, n^{2i-2h}\, p^{2h}$$

$$S_i = \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1\,,\,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1}\,.$$

Выдѣлимъ теперь въ формулѣ (I bis) коэффиціенты при различныхъ степеняхъ n.

Подставляя въ формулу (I bis) значенія R_1, R_2, ... R_i и отбирая члены съ одинаковыми степенями отношенія $p : n = x$ и полагая:

$$X_i = 1 - a_{2\,,\,i}x^2 + a_{4\,,\,i}x^4 - a_{6\,,\,i}x^6 + \ldots + (-1)^i x^{2i}\,,$$

гдѣ слѣдовательно

$$a_{2k\,,\,i} = \frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots(2i-2k+1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,2k}\,,$$

получимъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{D_1 X_1 n^2}{\lambda^2} + \\ + \frac{D_2 X_2 n^4}{\lambda^4} + \ldots + \frac{D_k X_k n^{2k}}{\lambda^{2k}} + \ldots \qquad \text{(A)}$$

Если бы поглощенія не было (т. е. $p=0$), то всѣ X_k были бы равны 1-цѣ, т. е. имѣли бы для всякаго k (цѣлаго и положительнаго) тождество

$$X_k = 1.$$

Если поглощеніе мало (т. е. p очень мало), то всѣ X_k будутъ очень близки къ 1-цѣ, тогда вмѣсто формулы (A) имѣемъ приближенную формулу:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{D_1 n^2}{\lambda^2} + \frac{D_2 n^4}{\lambda^4} + \ldots \qquad \text{(A bis)}$$

Если допустимъ гипотезу (подтвержденную опытомъ à posteriori)

$$D_k X_k = F^k,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{D_k X_k n^{2k}}{\lambda^{2k}} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{Fn^2}{\lambda^2}\right)^k = \frac{Fn^2}{\lambda^2 - Fn^2},$$

такъ какъ

$$\frac{Fn^2}{\lambda^2} < 1.$$

И такъ имѣемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = \frac{Fn^2}{\lambda^2 - Fn^2} + a + G\lambda^2,$$

или

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{F}{\frac{\lambda^2}{n^2} - F}. \qquad \text{(A ter)}$$

Эта формула представляетъ одинъ изъ частныхъ видовъ общей формулы свѣторазсѣянія. Она уже повѣрялась опытомъ.

Преобразуемъ подобнымъ же образомъ и формулу (II bis). Поступая совершенно такъ-же, какъ и выше, и полагая

$$a_{2k-1,\,i}=\frac{2i(2i-1)(2i-3)\ldots(2i-2k+2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots(2k-1)}$$

и

$$Y_i=a_{1,\,i}x-a_{3,\,i}x^3+a_{5,\,i}x^5-\ldots+(-1)^{i+1}a_{2i-1,\,i}\,x^{2i-1},$$

тогда

$$2np=H\lambda+\frac{D_1Y_1n^2}{\lambda^2}+\frac{D_2Y_2n^4}{\lambda^4}+\frac{D_3Y_3n^6}{\lambda^6}+\ldots \qquad \text{(B)}$$

Если допустимъ, какъ гипотезу,

$$D_kY_k=F^kx,$$

причомъ это F отлично отъ предыдущаго; то

$$2np=H\lambda+x\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Fn^2}{\lambda^2}\right)^k;$$

но

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Fn^2}{\lambda^2}\right)^k=\frac{Fn^2}{\lambda^2-Fn^2},$$

слѣдовательно

$$2np=H\lambda+\frac{Fnp}{\lambda^2-Fn^2}, \qquad \text{(B bis)}$$

если вмѣсто x внесемъ его значеніе $p:n$.

Если возьмемъ, какъ 1-е приближеніе,

$$2np=H\lambda,$$

тогда, какъ 2-е приближеніе,

$$2np = H\lambda + \frac{FH\lambda}{2(\lambda^2 - Fn^2)}$$

или

$$2np = \lambda\left(H + \frac{E}{\lambda^2 - Fn^2}\right),$$

гдѣ

$$E = \frac{FH}{2}.$$

Членъ Fn^2 измѣняется мало и его вліяніе незначительно, поэтому можно принять его за постоянное и означить C, тогда

$$2np = \lambda\left(H + \frac{E}{\lambda^2 - C}\right). \qquad \text{(B ter)}$$

Эту формулу можно разсматривать какъ 2-е приближеніе.

Теперь легко перейдти къ закону поглощенія, о которомъ упомянуто въ началѣ статьи.

Формула (B ter) показываетъ, что поглощеніе тѣмъ больше, чѣмъ ближе λ^2 къ количеству C, такъ что maximum поглощенія получимъ, если λ^2 равно C; означимъ это значеніе λ буквой λ_m, тогда

$$\lambda^2_m = C.$$

Таково условіе для простой поглощающей средины, т. е. для средины съ одною полосой поглощенія; если такихъ полосъ нѣсколько, то приведенное уравненіе имѣетъ мѣсто для каждой полосы отдѣльно. Опредѣляя значеніе коэффиціента C, т. е. помня, что онъ пропорціоналенъ коэффиціенту D или D_k, найдемъ, что

$$C = \alpha + \beta m,$$

гдѣ α и β будутъ коэффиціенты, независящіе отъ m, т. е. отъ плотности поглощающей средины.

И такъ имѣемъ:

$$\lambda_m{}^2 = \alpha + \beta m. \tag{d}$$

Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ подтверждается этотъ законъ наблюденіями.

Для такой повѣрки мы возьмемъ наблюденія Кеттелера, Пульфриха и Гессе.

Представимъ себѣ, что поглощающее вещество (твердое) растворено въ непоглощающемъ (жидкомъ), напримѣръ ціанинъ въ спиртѣ, пусть степень концентраціи такого раствора будетъ k; тогда можно принять, что m пропорціонально k и выраженіе (d) будетъ имѣть видъ:

$$\lambda_m{}^2 = A + Bk,$$

гдѣ A и B постоянные коэффиціенты (весьма приближенно).

I. Примѣнимъ сказанное къ наблюденіямъ Кеттелера (Wied. Annalen. Bd. XII, 1881. S. 481).

Кеттелеръ опредѣлялъ λ_m для растворовъ ціанина въ спиртѣ, концентраціи коихъ были слѣдующія:

$$k = \frac{5}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36},$$

причемъ k выражены въ произвольныхъ единицахъ; значенія λ_m были (въ тысячныхъ доляхъ миллиметра) 0,58010; 0,58616; 0,58992; 0,59193; 0,59320; 0,59401.

Подставляя эти значенія k и λ_m въ формулу

$$\lambda_m{}^2 = A + Bk,$$

мы вычислимъ A и B по способу наименьшихъ квадратовъ и найдемъ:

$$A = 0{,}3534\,;\quad B = -0{,}0098.$$

Если бы теперь мы вычислили обратно по A и B величины $\lambda_m{}^2$ и сравнили бы съ наблюденіями, то получили бы слѣдующее:

вычисленные $\lambda_m{}^2$	0,3369	0,3436	0,3469	0,3501	0,3526	0,3531
наблюденные	0,3365	0,3436	0,3480	0,3504	0,3519	0,3528
разности	+4	0	—11	—3	—7	—3

при этомъ средняя ошибка наблюденія есть $\pm 0{,}0007$.

II. Примѣнимъ теперь найденный законъ къ наблюденіямъ Пульфриха надъ ціаниномъ же (Wied. An. Bd. XIV, 1881. S. 177). Вычисляя подобнымъ же образомъ, нашли бы:

$$A = 0{,}3317\,,\quad B = -0{,}0186.$$

Разницу отъ выше-найденныхъ должно объяснить различіемъ въ температурахъ растворовъ, равно какъ и различіемъ взятаго ціанина въ обоихъ случаяхъ.

III. Воспользуемся теперь наблюденіями Гессе[1] (Wied. Ann. Bd. XI, S. 871. 1880).

a) Возьмемъ наблюденія надъ растворомъ анилина въ водѣ. Значеніе k здѣсь были:

$$1\,;\ 0{,}8\,;\ 0{,}6\,;\ 0{,}4\,;\ 0{,}2.$$

Опредѣляя B по формулѣ:

$$B = \frac{\lambda_m'^2 - \lambda_m{}^2}{k' - k},$$

гдѣ λ_m, k; λ'_m, k' суть длина волны и степень концентраціи для двухъ наблюденій, найдемъ въ среднемъ:

$$B = -0{,}0056.$$

[1] Замѣтимъ, что Гессе эмпирически получилъ законъ, подобный нашему.

Теперь для повѣрки закона опредѣлимъ A по формулѣ

$$A = \lambda_m^2 - Bk;$$

найдемъ:

$$A = 0{,}3177$$
80
79
77
78

среднее $A = 0{,}3178$.

b) Растворъ анилина въ спиртѣ даетъ

$$B = -0{,}0114,$$

и для A получаемъ значеніе

$$A - 0{,}3371$$
63
72
76
73

среднее $A = 0{,}3371$.

c) Ціанинъ въ спиртѣ. Находимъ совершенно такъ-же какъ и выше, комбинируя по два наблюденія:

$$B = -0{,}0131.$$

По B находимъ:

$$A = 0{,}3601$$
01
00
14 (?)
01

среднее $A = 0{,}3603$.

Это значеніе A вообще незначительно отличается отъ A, найденнаго изъ наблюденій Кеттелера и даже Пульфриха; причины разницы тѣ же.

d) Фуксинъ въ спиртѣ. Находимъ

$$B = -0,0120$$

и для A находимъ:

$$\begin{array}{r} A = 0,3589 \\ 572 \\ 609 \\ 593 \\ 589 \\ \hline \text{среднее } A = 0,3590. \end{array}$$

e) Еще ціанинъ въ спиртѣ. Онъ даетъ:

$$B = -0,0061$$

и

$$\begin{array}{r} A = 0,3380 \\ 78 \\ 76 \\ 80 \\ \hline \text{среднее } A = 0,3379. \end{array}$$

Всѣ эти наблюденія показываютъ достаточное согласіе (ибо наблюденія λ_m весьма трудны), и поэтому мы можемъ принять законъ

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m$$

за достаточно точный законъ.