ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ

МНОГИХЪ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ.

А. А. Маркова.

Обозначенія и предположенія. Сохранимъ тѣ же обозначенія, какъ въ моемъ разсужденіи — «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей». Будемъ также предполагать, что функція $f(y)$, входящая подъ знакомъ интеграла

$$\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y},$$

въ предѣлахъ интегрированія постоянно больше нуля.

Цѣль настоящей замѣтки состоитъ въ доказательствѣ сходимости непрерывной дроби

$$\cfrac{C_1}{p_1 - \cfrac{C_2}{p_2 - \cfrac{C_3}{p_3 - \cfrac{C_4}{p_4 - }}}}$$

соотвѣтствующей интегралу $\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y}$, для всѣхъ значеній z внѣ предѣловъ интегрированія.

Лемма.

$\int_{x_n}^{b} f(y)\,dy$ по мѣрѣ возрастанія n стремится къ предѣлу, равному нулю.

Доказательство.

Не трудно видѣть, что x_n при возрастаніи n постоянно возрастаетъ и остается меньше b.

Слѣдовательно, при безпредѣльномъ возрастаніи n, x_n стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу, не превосходящему b.

И коль скоро

$$\text{предѣлъ } (x_n)_{n=\infty} = b,$$

очевидно

$$\text{предѣлъ} \int_{x_n}^{b} f(y)\,dy = 0.$$

Допустимъ теперь, что

$$\text{предѣлъ } (x_n)_{n=\infty} = \beta' < b.$$

Тогда всякое число β, между b и β', больше x_n и потому выраженіе

$$\left(1 + \frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^2$$

меньше единицы при $a < y \leqq x_n$.

Напротивъ, это выраженіе больше единицы при $y > \beta$.

Если же возвысимъ это выраженіе въ достаточно большую цѣлую положительную степень h, получимъ выраженіе

$$\left(1 + \frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h},$$

которое при $a > y \leqq x_n$ будетъ меньше

$$\frac{\int_\beta^b f(y)\,dy}{\int_a^b f(y)\,dy}.$$

Полагая затѣмъ $n > h$, имѣемъ

$$\int_a^b \left(1+\frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} f(y)\,dy = \sum \left(1+\frac{x_i-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} \frac{\psi_n(x_i)}{\varphi'_n(x_i)},$$

откуда

$$\int_a^b \left(1+\frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} f(y)\,dy < \frac{\int_\beta^b f(y)\,dy.\sum \frac{\psi_n(x_i)}{\varphi'_n(x_i)}}{\int_a^b f(y)\,dy} = \int_\beta^b f(y)\,dy.$$

Съ другой стороны, нетрудно убѣдиться, что тотъ же интеграль $\int_a^b \left(1+\frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} f(y)\,dy$ больше $\int_\beta^b f(y)\,dy$.

Такимъ образомъ допущеніе, что предѣлъ $(x_n)_{n=\infty}$ неравенъ b, привело насъ къ неизбѣжному противурѣчію.

И такъ

предѣлъ $(x_n)_{n=\infty} = b$ и предѣлъ $\left[\int_{x_n}^b f(y)\,dy\right]_{n=\infty} = 0$*.

---

* Это доказательство заимствовано мною въ главныхъ чертахъ изъ мемуара *M. T. J. Stieltjes* «Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques», который помѣщенъ въ № 12 журнала «Annales scientifiques de l'École normale supérieure» за 1884 годъ.

Теорема.

Коль-скоро вещественное число u лежитъ внѣ предѣловъ a и b, навѣрно

$$\text{предѣлъ} \left\{\frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)}\right\}_{n=\infty} = \int_a^b \frac{f(y)\,dy}{u-y}\,.$$

Доказательство.

Разсмотримъ сначала случай $u > b$.

Тогда при $a < z < b$ функція

$$\Omega(z) = \frac{1}{u-z}$$

сохраняетъ постоянно знакъ плюсъ, равно какъ и всѣ ея производныя по z.

Слѣдовательно, согласно неравенствамъ 7 и 11 моей статьи— «О нѣкот. прил. алгебр. непрер. дробей», имѣемъ

$$\int_a^b \frac{f(y)}{u-y}dy > \sum \frac{\psi_n(x_i)}{(u-x_i)\varphi_n'(x_i)} > \int_a^{x_n} \frac{f(y)}{u-y}dy$$

$$\left(i=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n\right).$$

Откуда, принимая во вниманіе очевидное равенство

$$\sum \frac{\psi_n(x_i)}{(u-x_i)\varphi_n'(x_i)} = \frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)}\,,$$

выводимъ

$$0 < \int_a^b \frac{f(y)}{u-y}dy - \frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)} <$$

$$< \int_{x_n}^b \frac{f(y)}{u-y}\,dy < \frac{1}{u-b}\int_{x_n}^b f(y)\,dy\,.$$

Остается сопоставить послѣднее неравенство съ только-что доказанною леммою, и наша теорема при $u > b$ доказана.

Подобнымъ-же образомъ можно доказать ее и въ случаѣ $u < a$. Однако, тогда надо нѣсколько измѣнить только-что доказанную лемму, равно какъ и лемму вторую со всѣми ея слѣдствіями.

А именно, при $u < a$ будемъ имѣть:

$$0 < \left\{\left| \int_a^b \frac{f(y)}{y-u} + \frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)} \right|\right\} < \int_a^{x_1} \frac{(y)}{y-u} < \text{сколь}$$

угодно малой величины.

Эти измѣненія удобнѣе всего можно получить при помощи слѣдующей подстановки:

$$y = a + b - Y$$

$$u = a + b - U.$$

С.-Петербургъ.

1-го января 1885 г.