

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ

ОДНОГО ЛИНЕЙНАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ n-ГО ПОРЯДКА.

В. П. Алексѣевскаго.

1. Уравненіе, способъ интегрированія котораго излагается въ этой замѣткѣ, имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i z^{-i} D^{n-i} y + a_n z^m y = 0.$$

Докажемъ предварительно нѣсколько тождествъ.

Пусть u — какая нибудь функція переменнаго x , p и q числа цѣлыя, тогда по теоремѣ Лейбница, распространенной на производныя съ отрицательными указателями, имѣемъ:

$$D^{-p} x^q D^{p+q} u =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=q} (-1)^i \frac{p(p+1)\dots(p+i-1)}{i!} q(q-1)\dots(q-i+1) x^{q-i} D^{q-i} u$$

но, представивъ правую часть слѣдующимъ образомъ:

$$x^{p+q} \sum_{i=0}^{i=q} \frac{q(q-1)\dots(q-i+1)}{i!} (-1)^i p(p+1)\dots(p+i-1) x^{-(p+i)} D^{q-i} u,$$

легко замѣтить, что

$$D^{-p} x^q D^{p+q} u = x^{p+q} D^q x^{-p} u.$$

Умноживъ эту формулу на постоянное A_q , сообщивъ q все значенія отъ 0 до нѣкотораго цѣлаго числа r и складывая результаты, получимъ:

$$\sum_{q=0}^{q=r} A_q D^{-p} x^q D^{p+q} u = \sum_{q=0}^{q=r} A_q x^{p+q} D^q x^{-p} u.$$

откуда непосредственно слѣдуетъ

$$x^{-p} \cdot \sum_{q=0}^{q=r} A_q x^{p+q} D^q (D^p u) = D^p \sum_{q=0}^{q=r} A_q x^{p+q} D^q (x^{-p} u). \quad (1)$$

2. Введя слѣдующее законоположеніе:

$$x^{\mu_1} D x^{\mu_2} D \dots x^{\mu_r} D u = \left[x^{\mu_i} D \right]_1^r u, \\ s_r = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r,$$

не трудно убѣдиться, что

$$\left[x^{\mu_i} D \right]_1^r u = x^{s_r} \sum_{i=0}^{i=r-1} A_i^{(r)} x^{-i} D^{r-i} u.$$

Для этого стоитъ только, допустивъ справедливость этой формулы для какого нибудь значенія r , продифференцировать обѣ части, а умноживъ обѣ части на x^μ , найдемъ, что она справедлива и для $r+1$.

Если положимъ въ послѣдней формулѣ

$$Du = v \quad \mu_r = \alpha + n \quad n > r-1,$$

то, очевидно, имѣемъ:

$$x^\alpha \cdot x^{-s_{r-1}} \left[x^{\mu_i} D \right]_1^{r-1} x^{\alpha+n} v = \sum_{i=0}^{i=r-1} A_i^{(r)} x^{n-i} D^{r-1-i} v.$$

Полагая для сокращенія

$x^{-s_r} \left[x^{u_i} D \right]_1^r u = \prod u,$
 предыдущей формулы дадимъ такой видъ:

$$x^{-\alpha} \prod_{i=0}^{r-1} x^{\alpha+n} v = \sum_{i=0}^{r-1} A_i^{(r)} x^{n-i} D^{r-1-i} v.$$

Измѣнивъ здѣсь r въ $n-r$, v въ $x^{-(r+1)} v$, находимъ:

$$\left\{ x^{-\alpha} \prod_{i=0}^{n-r-1} x^{\alpha+n} \right\} x^{-(r+1)} v = \sum_{i=0}^{n-r-1} A_i^{(n-r)} x^{n-i} D^{n-r-1-i} (x^{-(r+1)} v).$$

Отсюда, на основаніи формулы (1),

$$D^{r+1} \left\{ x^{-\alpha} \prod_{i=0}^{n-r-1} x^{\alpha+n} \right\} x^{-(r+1)} v =$$

$$= x^{-(r+1)} \sum_{i=0}^{n-r-1} A_i^{(n-r)} x^{n-i} D^{n-r-1-i} (D^{r+1} v)$$

или

$$D^{r+1} \left\{ x^{-\alpha} \prod_{i=0}^{n-r-1} x^{\alpha+n} \right\} x^{-(r+1)} v = x^{-(r+1)} \left\{ x^{-\alpha} \prod_{i=0}^{n-r-1} x^{\alpha+n} \right\} D^{r+1} v;$$

умноживъ же обѣ части на x^{-n+r+1} , получаемъ:

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\alpha} \prod_{i=0}^{n-r-1} x^{\alpha+n} \right\} x^{-(r+1)} v =$$

$$= x^{-(\alpha+n)} \prod_{i=0}^{n-r-1} x^{(\alpha+n)} \cdot D^{r+1} v. \quad (1)'$$

3. Теперь докажемъ слѣдующее тождество:

$$\begin{aligned} & \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^k \prod_{r=0}^{n-r-1} D^r u_r = \\ & = x^{\mu_{n-r, \rho+k}} \prod_{r=0}^{n-r-1} x^{\mu_{n-r, \rho+k}} D^{r+1} \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^k u_r. \quad (2) \end{aligned}$$

Здѣсь $\mu_{n-r, \rho+k} = \mu_{n-r, \rho} + nk.$

а $[x^{-n+r+1} D^{r+1}]^k$ означаетъ повтореніе k разъ операціи, указанной въ скобкахъ.

Пусть u_r и u_{r+1} двѣ произвольныя функціи, связанныя уравненіемъ:

$$u_r = D^{-(r+1)} x^{n-r-1} u_{r+1}.$$

Замѣтивъ, что

$$\prod_{r=0}^{n-r} D^r u_r = x^{-\mu_{n-r, \rho}} \prod_{r=0}^{n-r-1} x^{\mu_{n-r, \rho}} D^{r+1} u_{r+1}$$

послѣ подстановки вмѣсто u_r его значенія и дифференцируя обѣ части $(r+1)$ разъ, имѣемъ:

$$D^{r+1} \prod_{r=0}^{n-r} D^r u_r = D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r, \rho}} \prod_{r=0}^{n-r-1} x^{\mu_{n-r, \rho} + n} \right\} x^{-(r+1)} u_{r+1},$$

по умноженіи обѣихъ частей на x^{-n+r+1} , на основаніи формулы (1)', получимъ:

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \prod_{r=0}^{n-r} D^r u_r = x^{-\mu_{n-r, \rho+1}} \prod_{r=0}^{n-r-1} x^{\mu_{n-r, \rho+1}} D^{r+1} u_{r+1}.$$

Послѣднее равенство можно написать такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,p}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p}} \right\} D^{r+1} u_{p+1} = \\ (2) \quad = \left\{ x^{-\mu_{n-r,p+1}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p+1}} \right\} D^{r+1} u_{p+1}. \end{aligned}$$

Замѣтивъ, что выраженія въ скобкахъ имѣютъ тотъ-же самый видъ, мы въ-правѣ написать:

$$\begin{aligned} x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,p+1}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p+1}} \right\} D^{r+1} u_{p+1} = \\ = \left\{ x^{-\mu_{n-r,p+2}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p+2}} \right\} D^{r+1} u_{p+2} \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,p+k-1}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p+k-1}} \right\} D^{r+1} u_{p+k-1} = \\ = \left\{ x^{-\mu_{n-r,p+k}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p+k}} \right\} D^{r+1} u_{p+k}. \end{aligned}$$

Исключая изъ всѣхъ этихъ равенствъ $u_{p+1} \dots u_{p+k-1}$, найдемъ:

$$\begin{aligned} \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^k \left\{ x^{-\mu_{n-r,p}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p}} \right\} D^{r+1} u_p = \\ = x^{-\mu_{n-r,p+k}} \prod_{n-r-1} x^{\mu_{n-r,p+k}} D^{r+1} u_{p+k} \end{aligned}$$

при чемъ въ силу зависимости между u_p и u_{p+1} имѣемъ:

$$u_p = \left[D^{-(r+1)} x^{n-r-1} \right]^k u_{p+k}.$$

Исключая изъ двухъ послѣднихъ равенствъ u_{r+k} , и получимъ иско-
мое тождество. Если же изъ этихъ же равенствъ исключить u_r , и принять условно

$$\left[D^{-(r+1)} x^{n-r-1} \right]^k u_{r+k} = \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{-k} u_{r+k},$$

то не трудно будетъ замѣтить, что тождество (2) имѣетъ мѣ-
сто и для отрицательныхъ значеній k .

Изъ разсмотрѣнія тождества (2) вытекаетъ слѣдующее: если
положить

$$u_r = v_r$$

$$v_{r+1} = \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{k_{n-r-1}} v_r,$$

причемъ k_{n-r-1} замѣняетъ k , то предыдущее тождество можно
представить въ видѣ:

$$\begin{aligned} & \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{k_{n-r-1}} \prod_{n-r}^{n-r-1} D^r v_r = \\ & = x^{\mu_{n-r, r+k}} \prod_{n-r-1}^{n-r-1} x^{-\mu_{n-r, r+k}} D^{r+1} v_{r+1}. \end{aligned}$$

Предполагая

$$\mu_{n-r, r+k} = 0$$

или, что то-же,

$$\mu_{n-r, r} = -nk_{n-r-1},$$

получаемъ:

$$\left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{k_{n-r-1}} \prod_{n-r}^{n-r-1} D^r v_r = \prod_{n-r-1}^{n-r-1} D^{r+1} v_{r+1}.$$

Такъ какъ эта формула справедлива при всякомъ значеніи r
отъ 0 до n , то давъ r всѣ значенія отъ 0 до $n-1$, по исклю-
ченіи промежуточныхъ функцій v_1, v_2, \dots, v_{r-1} , легко находимъ:

$$\left. \begin{aligned} & \left[x^{-n+r} D^r \right]^{k_{n-r}} \left[x^{-n+r-1} D^{r-1} \right]^{k_{n-r+1}} \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \left[x^{-n+1} D \right]^{k_{n-1}} \prod_{r=0}^n v_0 = \prod_{r=0}^{n-r} D^r v_r \\ & v_r = \left[x^{-n+r} D^r \right]^{k_{n-r}} \dots \dots \left[x^{-n+1} D \right]^{k_{n-1}} v_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)'$$

или полагая для краткости

$$v_r = \Phi^{(r)} v_0, \quad v_0 = \Phi^{(-1)} v_r$$

имѣемъ:

$$\Phi^{(r)} \prod_{r=0}^n v_0 = \prod_{r=0}^{n-r} D^r v_r$$

или

$$\Phi^{(r)} \prod_{r=0}^n v_0 = \prod_{r=0}^{n-r} D^r \Phi^{(r)} v_0. \quad (3)$$

Если положить въ этихъ формулахъ $r = n - 1$ и замѣтить, что $\prod_{i=0}^1 u = Du$, то найдемъ:

$$\Phi^{(n-1)} \prod_{r=0}^n v_0 = D^n \Phi^{(n-1)} v_0. \quad (3)'$$

Выводъ этотъ справедливъ, когда $\mu_{i+1, r} = -nk_i$, гдѣ k_i цѣлое положительное или отрицательное число.

4. Переходимъ теперь къ интегрированію уравненія

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i z^{-i} D^{n-i} y + a_n z^m y = 0. \quad (I)$$

Согласно съ сказаннымъ въ § 2, это уравненіе можно представить въ видѣ:

$$z^{-s_n} \left[z^{\mu_i} D \right]_1^n y + a_n z^m y = 0. \quad (I)'$$

Не трудно привести это уравнение къ другому такого-же вида, въ которомъ соотвѣтственное m равно нулю.

Дѣйствительно, сдѣлавъ замѣну независимаго перемѣннаго по формулѣ

$$z = \frac{x^{p+1}}{p+1},$$

гдѣ p пока произвольное постоянное количество, и умноживъ обѣ части уравненія на x^{np} , получимъ:

$$x^{-s_n(p+1)+np} \left[x^{\mu_i(p+1)-p} D \right]_1^n y + \frac{a_n}{(p+1)^m} x^{m(p+1)+np} y = 0.$$

Выбравъ p такъ, чтобы

$$m(p+1) + np = 0, \quad (a)$$

и положивъ для краткости

$$\mu_i(p+1) - p = -nk_{i-1}, \quad -s_n(p+1) + np = n\sigma \quad (b)$$

$$\sigma = k_0 + k_1 + \dots + k_{n-1}, \quad \frac{a_n}{(p+1)^m} = \lambda,$$

послѣднее уравненіе обращаемъ въ такое:

$$x^{n\sigma} \left[x^{-nk_{i-1}} D \right]_1^n y + \lambda y = 0, \quad (II)$$

или, наконецъ, вводя символъ Π :

$$\prod_n y + \lambda y = 0.$$

Если все k_{i-1} суть числа цѣлыя, то, подвергая обѣ части этого уравненія операціи, которую мы означали чрезъ $\Phi^{(n-1)}$, получимъ:

$$\Phi^{(n-1)} \prod_{i=1}^n y + \lambda \Phi^{(n-1)} y = 0,$$

или, на основаніи формулы (3),

$$D^n \Phi^{(n-1)} y + \lambda \Phi^{(n-1)} y = 0.$$

Допустивъ, что

$$\Phi^{(n-1)} y = \omega,$$

получаемъ уравненіе:

$$D^n \omega + \lambda \omega = 0,$$

интегралъ котораго извѣстенъ.

Убѣдившись такимъ образомъ, что уравненіе (II) интегрируется, когда k_{i-1} суть цѣлыя числа, при помощи равенствъ (а) и (b) легко находимъ, что уравненіе вида (I)' интегрируется, когда

$$\mu_i = \frac{(m+n)(nk_{i-1}+1)-n}{n}, \quad (\text{III})$$

гдѣ m совершенно произвольно.

И такъ, для того чтобы уравненіе вида (I), коэффициенты котораго суть данныя числа

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1},$$

интегрировалось, необходимо, чтобы коэффициенты эти были равны соотвѣтственнымъ коэффициентамъ уравненія (I)', которые мы для ясности означимъ чрезъ A_1, A_2, \dots, A_{n-1} . Но послѣдніе суть опредѣленныя функціи (алгебраическія) количествъ: $k_1,$

k_2, \dots, k_{n-1}, m ; следовательно, приравнявъ одни коэффициенты другимъ, мы получимъ систему изъ $(n-1)$ уравненій:

$$A_1 = a_1, A_2 = a_2, \dots, A_{n-1} = a_{n-1} \quad (IV)$$

съ n неизвѣстными k_1, \dots, k_{n-1}, m . Предположимъ, что мы опредѣлили k_1, k_2, \dots, k_{n-2} и m чрезъ k_{n-1} ; если при этомъ окажется, что всѣ k_1, k_2, \dots, k_{n-2} выражаются чрезъ k_{n-1} такъ, что при предположеніи k_{n-1} цѣлымъ числомъ и всѣ остальные k_1, k_2, \dots, k_{n-2} будутъ цѣлыми числами, то, при найденномъ значеніи m въ функціи k_{n-1} , данное уравненіе съ коэффициентами a_1, \dots, a_{n-1} интегрируется.

Въ частномъ случаѣ, когда

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0,$$

т. е. когда данное уравненіе имѣетъ видъ:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_n z^m y = 0, \quad (V)$$

два значенія m могутъ быть легко опредѣлены. Дѣйствительно, не трудно замѣтить, что при высказанныхъ условіяхъ, уравненія (IV) между прочимъ удовлетворяются, когда

$$\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-1} = 0,$$

что возможно на основаніи формулы (III), когда

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = k,$$

при чемъ

$$m = -n + \frac{n}{nk+1}.$$

