ОПРЕДѢЛЕНІЕ

нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля.

А. А. Маркова.

Задача.

Опредѣлить коэффиціенты

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

цѣлой функціи отъ x

$$y = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

такъ, чтобы наибольшее численное значеніе отношенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}},$$

гдѣ $f(x)$ нѣкоторая данная цѣлая функція отъ x не выше какъ $2n$-ой степени

$$f(x) = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \ldots \ldots (1 + a_{2n} x)$$

и x получаетъ всѣ значенія между -1 и $+1$, было какъ можно меньше.

Примѣчаніе.

Вопросъ этотъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, для рѣшенія которыхъ мы не имѣемъ никакихъ общихъ пріемовъ, кромѣ указанныхъ П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ «Sur les questions de Minima etc.».

Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ представляетъ обобщеніе двухъ вопросовъ, рѣшенныхъ въ только что упомянутомъ мемуарѣ. На этомъ частномъ примѣрѣ я имѣю въ виду показать, что для всѣхъ разобранныхъ до сихъ поръ примѣровъ основныя разсужденія П. Л. Чебышева[1] могутъ быть замѣнены болѣе элементарными и наглядными.

По примѣру П. Л. Чебышева требованіе нашей задачи можно формулировать такъ: отношеніе $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$ должно наименѣе уклоняться отъ нуля.

Замѣтимъ еще, что одни изъ данныхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$$

могутъ быть вещественными, другія мнимыми.

Я предполагаю только, что произведеніе

$$(1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \ldots\ldots (1 + a_{2n} x)$$

приводится къ вещественной функціи отъ x и не обращается въ нуль ни при какихъ значеніяхъ x между -1 и $+1$.

Выводъ дифференціальнаго уравненія.

По примѣру Е. И. Золотарева[2] приведемъ вопросъ нашъ къ интегрированію нѣкотораго дифференціальнаго уравненія.

Пусть будутъ

---

[1] Sur les questions de Minima etc. 1858. Théorème 1.

[2] Приложеніе эллиптическихъ функцій и пр. 1877.

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \ldots . \leqq \alpha_{m-1} \leqq \alpha_m$$

всѣ корни уравненія

$$y = 0,$$

лежащіе между -1 и $+1$, причемъ двукратные корни считаются дважды, трехкратные трижды и т. д.

Нетрудно убѣдиться, что m должно равняться n.

Въ противномъ случаѣ, полагая

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_m) = \omega(x)$$

и

наименьшее численное значеніе $\frac{y}{\omega(x)} = k, \left[-1 \leqq x \leqq +1\right]$,

можно составить функцію

$$\frac{y \mp k\omega(x)^{*}}{\sqrt{f(x)}},$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ вопроса и при $-1 \leqq x \leqq +1$

менѣе уклоняющуюся отъ нуля, чѣмъ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Наибольшія отклоненія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

отъ нуля соотвѣтствуютъ

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, +1.$$

---

* Изъ двухъ знаковъ $\mp$ передъ $k\omega(x)$ надо взять $-$, если между $x=-1$ и $x=+1$ отношеніе $\frac{y}{\omega(x)}$ число положительное, и $+$ въ противномъ случаѣ.

Здѣсь

$$\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{n-1}$$

означаютъ корни уравненія

$$\frac{d\dfrac{y}{\sqrt{f(x)}}}{dx} = \frac{y'f(x) - \frac{1}{2}yf'(x)}{\{\sqrt{f(x)}\}^3} = 0,$$

и лежатъ соотвѣтственно между

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2,\ \alpha_2 \text{ и } \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{n-1} \text{ и } \alpha_n.$$

Если въ одномъ изъ этихъ промежутковъ приходится нѣсколько корней уравненія

$$y'f(x) - \frac{1}{2}yf'(x) = 0,$$

то мы выбираемъ изъ этихъ корней одинъ и притомъ такой, какому соотвѣтствуетъ наибольшее численное значеніе $\dfrac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Всѣ полученныя такимъ образомъ наибольшія отклоненія нашей функціи отъ нуля должны быть равны между собой. Въ противномъ случаѣ можно составить другую функцію того же вида, менѣе отклоняющуюся отъ нуля.

Пусть напримѣръ наибольшее отклоненіе нашей функціи отъ нуля равно L' въ промежуткѣ отъ $x=\alpha_k$ до $x=\alpha_{k+1}$ и L въ промежуткѣ отъ $x=-1$ до $x=\alpha_k$ и отъ $x=\alpha_{k+1}$ до $x=1$, причемъ $L > L'$.

Составимъ функцію

$$\omega(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+2})\ldots$$

$$\ldots(x-\alpha_n) = \frac{y}{(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})},$$

которая сохраняетъ знакъ одинаковый съ y, при $-1 \leqq x < \alpha_k$ и при $\alpha_{k+1} < x \leqq +1$.

Положимъ затѣмъ

наибольшее численное значеніе $\dfrac{\omega(x)}{\sqrt{f(x)}} = h; [-1 \leqq x \leqq +1]$.

Тогда не трудно видѣть, что функція

$$y = \frac{\frac{L-L'}{h}\,\omega(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

при $-1 \leqq x \leqq +1$ будетъ менѣе уклоняться отъ нуля, чѣмъ

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что при $x = +1$ и при $x = -1$ наша функція также должна равняться $\pm L$.

Въ предыдущемъ разсужденіи придется замѣнить только

$\omega(x)$ на $-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})$

или $+(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$.

И такъ, выраженіе

$$\frac{y^2}{f(x)} - L^2 = \frac{y^2 - L^2 f(x)}{f(x)}$$

должно обращаться въ нуль при

$$x = -1,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ldots \beta_{n-1},\ +1$$

и производная его

$$\frac{d\dfrac{y^2}{f(x)}}{dx} = \frac{2yy'f(x)-y^2f'(x)}{[f(x)]^2}$$

при

$$x = \beta_1,\ \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{n-1}.$$

А потому

$$\frac{d[y^2-L^2f(x)]}{dx} = 2yy' - L^2f'(x)$$

при

$$x = \beta_1,\ \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{n-1}$$

также обращается въ нуль.

Слѣдовательно

$$y^2 - L^2f(x) = -(1-x^2)\,W^2$$

$$2y'f(x) - yf'(x) = 2WV,$$

гдѣ V и W двѣ цѣлыя функціи отъ x.

Степень W равна $n-1$, а степень V не больше степени $f(x)$ и $2n-1$.

Положимъ:

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}} = z$$

и исключимъ изъ нашихъ двухъ уравненій W.

Такимъ образомъ получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dz}{\sqrt{L^2-z^2}} = \frac{Vdx}{\sqrt{1-x^2}.\,f(x)} = \sum \frac{A_k\,dx}{\sqrt{1-x^2}.\,(1+a_kx)}. \quad (1)$$

Рѣшеніе.

Введемъ вспомогательныя числа φ_k, опредѣляемыя уравненіями:

$$\operatorname{Cos}\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\,\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+a_k x}}, \quad \operatorname{Sin}\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\,\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+a_k x}},$$

причемъ для полной опредѣленности всѣ встрѣчающіеся у насъ квадратные корни будемъ извлекать такъ, чтобы вещественныя части выходили положительными, и сверхъ того при $x = -1$ положимъ $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+a_k}\,\sqrt{1-a_k}}{\sqrt{1-x^2}\,.\,(1+a_k x)}$$

и вещественная часть этого выраженія постоянно остается отрицательною (конечно $-1 < x < +1$).

При помощи введенныхъ нами величинъ φ_k общее рѣшеніе дифференціальнаго уравненія (1) можетъ быть выражено слѣдующею формулою:

$$z = L\operatorname{Cos}\left(C + \sum \frac{2A_k\varphi_k}{\sqrt{1+a_k}\,\sqrt{1-a_k}}\right).$$

Въ этой формулѣ постоянныя

$$L,\ C,\ A_1,\ A_2,\ .\ .\ .\ ,\ A_{2n}$$

остаются неопредѣленными.

Необходимыя значенія ихъ я просто *угадываю.*

А именно, искомая нами функція z опредѣляется такимъ равенствомъ:

$$z = L\,\mathrm{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}),$$

откуда

$$y = L\sqrt{f(x)}\,\mathrm{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}), \qquad (2)$$

или

$$y = \frac{L}{2}\Big\{\prod_k\Big(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{x-1}\Big) +$$

$$+ \prod_k\Big(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{x-1}\Big)\Big\}. \qquad (3)$$

Здѣсь буквою $\prod_k$ мы хотимъ выразить произведеніе, распространенное на всѣ значенія k.

Нетрудно видѣть, что написанная нами функція y дѣйствительно цѣлая и притомъ n-ой степени.

Располагая эту функцію по степенямъ x, для коэффиціента при x^n получаемъ слѣдующее выраженіе

$$\frac{L}{2}\Big\{\prod_k\Big(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\Big) + \prod_k\Big(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\Big)\Big\}.$$

По условіямъ вопроса, коэффиціентъ этотъ долженъ приводиться къ единицѣ.

Слѣдовательно,

$$L = \frac{2}{\prod_k\Big(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\Big) + \prod_k\Big(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\Big)}. \qquad (4)$$

Остается доказать, что составленная такимъ образомъ функція $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ дѣйствительно наименѣе отклоняется отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$.

Доказательство.

По мѣрѣ возрастанія x отъ -1 до $+1$ вещественныя части всѣхъ φ_k убываютъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до нуля; вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}$$

убываетъ отъ $n\pi$ до нуля.

А при такомъ убываніи суммы

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}$$

косинусъ ея

$$\mathrm{Cos}\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n})$$

переходитъ черезъ нуль ровно n разъ и каждый разъ мѣняетъ свой знакъ.

Тотъ-же косинусъ достигаетъ своего наибольшаго численнаго значенія, единицы, при

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n} = n\pi, (n-1)\pi, (n-2)\pi, \ldots 2\pi, \pi, 0.$$

Соотвѣтствующія значенія x пусть будутъ

$$-1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, +1.$$

Сравнимъ нашу функцію $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ съ какою нибудь другою того-же вида $z = \frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}$.

Разность ихъ

$$\frac{y_1 - y}{\sqrt{f(x)}}$$

можетъ обращаться въ нуль только $n-1$ разъ, такъ-какъ $y_1 - y$ цѣлая функція отъ x не выше $(n\text{-}1)$-ой степени.

Поэтому знакъ этой разности не можетъ быть противуположенъ знаку $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ при всѣхъ $n+1$ слѣдующихъ значеніяхъ x:

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, +1.$$

А коль-скоро при

$$x = \beta_k$$

разность

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

имѣетъ одинаковый знакъ съ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$, численное значеніе

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}$$

больше соотвѣтственнаго численнаго значенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}},$$

т. е. болѣе L.

Итакъ, дѣйствительно, найденная нами функція z менѣе отклоняется отъ нуля, чѣмъ какая бы то ни было другая функція того-же вида.