ОБЪ УСЛОВІЯХЪ

ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНІЯ

$$\frac{d^3u}{dx^3} + x^m u = 0.$$

П. С. Флорова.

§ 1. Непосредственно очевидны два случая, въ которыхъ уравненіе

$$\frac{d^3u}{dx^3} + x^m u = 0 \qquad (1)$$

интегрируется: это $m=0$ и $m=-3$. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ полный его интегралъ выражается, какъ извѣстно, отношеніемъ

$$u = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x};$$

во второмъ — отношеніемъ

$$u = c_1 e^{\varrho_1 x} + c_2 e^{\varrho_2 x} + c_3 e^{\varrho_3 x},$$

гдѣ c_1 c_2 c_3 произвольныя постоянныя, а r и ϱ корни уравненій:

$$r^3 + 1 = 0, \qquad \varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2) + 1 = 0.$$

§ 2. Для опредѣленія другихъ случаевъ интегрируемости уравненія (1) умножаемъ его на x^{-m} и потомъ дифференцируемъ; результатомъ будетъ уравненіе

$$\frac{d^3\omega}{dx^3} - \frac{m}{x}\frac{d^2\omega}{dx^2} + x^m\omega = 0,$$

въ которомъ $\omega = \frac{du}{dx}$. Измѣнивъ въ этомъ уравненіи перемѣнное независимое по формулѣ

$$x = \left(\frac{c+1}{a}\,\xi\right)^{\frac{1}{c+1}},$$

гдѣ a и c нѣкоторыя постоянныя, связанныя между собою отношеніемъ

$$a^{m+3} = (c+1)^{m-3c},$$

найдемъ:

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^3} - \frac{m-3c}{(c+1)\xi}\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{c(c-m-1)}{(c+1)^2\xi^2}\frac{d\omega}{d\xi} + \xi^{\frac{m-3c}{c+1}}\omega = 0.$$

Полагая здѣсь

$$c = m+1,$$

получимъ

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^3} + \frac{2m+3}{(m+2)\xi}\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \xi^{-\frac{2m+3}{m+2}}\omega = 0.$$

Умноживъ это уравненіе на $\xi^{\frac{2m+3}{m+2}}$ и проинтегрировавъ результатъ, будемъ имѣть:

$$\frac{d^3\theta}{d\xi^3} + \xi^{-\frac{2m+3}{m+2}}\theta = 0,$$

гдѣ $\theta = \int \omega\, d\xi$.

*

§ 3. Если въ уравненіи (1) измѣнимъ перемѣнное независимое по формулѣ

$$x = -\frac{1}{\xi},$$

то, въ силу отношенія

$$(\alpha) \qquad \frac{d^3u}{dx^3} = \xi^4 \frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2 u),$$

получимъ

$$\frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2 u) + \xi^{-(m+4)} u = 0.$$

Отсюда, положивъ

$$\xi^2 u = v,$$

найдемъ

$$\frac{d^3 v}{d\xi^3} + \xi^{-(m+6)} v = 0.$$

§ 4. Такимъ образомъ отъ уравненія (1), модуль котораго m, можно перейдти къ уравненіямъ, модули которыхъ таковы:

$$-(m+6) \quad \text{и} \quad -\frac{2m+3}{m+2}.$$

Въ свою очередь упомянутыя сейчасъ уравненія способны обратиться въ уравненія съ слѣдующими модулями:

$$-\frac{2m+9}{m+4} \quad \text{и} \quad -\frac{4m+9}{m+2}.$$

Сказаннаго вполнѣ достаточно для того, чтобы опредѣлить всѣ случаи, въ которыхъ уравненіе (1) можетъ быть проинтегрировано помощью преобразованій, указанныхъ въ двухъ предыдущихъ параграфахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ преобразова-

ній, необходимыхъ для измѣненія модуля m въ $-\dfrac{2m+9}{m+4}$, назовемъ одною операціей, то понятно, что, по совершеніи i такихъ операцій надъ уравненіемъ (1), получимъ уравненіе съ слѣдующимъ модулемъ:

$$-\frac{(3i-1)m+9i}{im+3i+1}. \qquad (\alpha)$$

Подобнымъ образомъ отъ модуля $-\dfrac{4m+9}{m+2}$ перейдемъ къ такому модулю

$$-\frac{(3i+1)m+9i}{im+3i-1}. \qquad (\beta)$$

Если теперь каждое изъ уравненій, модули которыхъ (α) и (β), подвергнемъ преобразованію, указанному въ предыдущемъ параграфѣ, то измѣнимъ эти модули въ такіе:

$$-\frac{(3i+1)m+9i+6}{im+3i+1} \qquad (\gamma)$$

$$-\frac{(3i-1)m+9i-6}{im+3i-1}. \qquad (\delta)$$

Приравнявъ формулы (α), (β), (γ), (δ) сначала нулю, а потомъ -3, получимъ:

$$m=\frac{-9i}{3i-1}$$

$$m=\frac{-9i}{3i+1}$$

$$m=-\frac{9i+6}{3i+1}$$

$$m = -\frac{9i - 6}{3i - 1}$$

$$m = -3.$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (1) интегрируется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда

$$m = -3 \pm \frac{3}{3i - 1},$$

гдѣ i какое угодно положительное или отрицательное цѣлое число. Понятно, что можно даже полагать $i = \pm \infty$, ибо положеніе это даетъ $m = -3$.