

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е

НАИВОЛЬШАГО И НАИМЕНЬШАГО ЗНАЧЕНІЯ НѢКОТОРОЙ
ВЕЛИЧИНЫ.

А. А. Маркова.

Въ журналѣ Ліувилля за 1874-й годъ появилась небольшая замѣтка П. Л. Чебышева¹, въ которой между прочимъ упоминается о слѣдующей задачѣ.

Задача.

Дана геометрическая прямая линія AB

$A \quad \quad \quad M \quad \quad \quad B$

По линіи этой неизвѣстнымъ образомъ распреѣлена масса.

Извѣстны только вся масса, распреѣленная по AB , центръ тяжести этой массы и моментъ инерціи ея относительно центра тяжести.

Требуется опредѣлить высшій и низшій предѣлы для массы, которая можетъ при этихъ данныхъ придтись на нѣкоторый опредѣленный отрѣзокъ AM всей прямой AB .

Не останавливаясь на изслѣдованіи вопроса, знаменитый ученый сообщаетъ прямо окончательный результатъ.

¹ Sur les valeurs limites des intégrales.

Какъ онъ пришелъ къ своему результату, остается неизвѣстнымъ и, на сколько я знаю, до сихъ поръ никѣмъ другимъ также не былъ указанъ путь для рѣшенія этого.

Между тѣмъ, по своеобразности своего характера, вопросъ этотъ заслуживаетъ вниманія.

Въ виду всѣхъ этихъ обстоятельствъ я надѣюсь, что настоящее мое разсужденіе, приводящее къ рѣшенію его, не будетъ лишено интереса.

Данныя.

Обозначимъ длину AB буквою l , а длину AM буквою x .

Пусть вся масса прямой AB сосредоточена въ точкахъ

$$N_1, N_2, N_3, \dots$$

причемъ

$$AN_1 = y_1, AN_2 = y_2, AN_3 = y_3, \dots$$

и массы, приходящіяся на эти точки, соотвѣтственно равны

$$m_1, m_2, m_3, \dots$$

Согласно условіямъ вопроса, намъ извѣстны

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \Sigma m = p$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots = \Sigma m y = p d$$

$$m_1 (d - y_1)^2 + m_2 (d - y_2)^2 + m_3 (d - y_3)^2 + \dots = \Sigma m y^2 - p d^2 = k$$

Число же всѣхъ точекъ N , распредѣленіе ихъ по AB и распредѣленіе по этимъ точкамъ всей массы p остаются неопредѣленными.

Надо распорядиться этими неопредѣленными такъ, чтобы масса отрѣзка AM достигала своего наибольшаго или наименьшаго значенія.

Мы займемся сначала разысканіемъ maximum-а массы, приходящейся на AM .

Преобразование вопроса.

Прежде всего покажемъ, что число точекъ N , не лишенныхъ массы, можетъ быть сведено къ тремъ:

1) На отрѣзкѣ MB находятся двѣ или болѣе точекъ N .

$\overline{A \qquad \qquad M \qquad \qquad N \qquad \qquad P \ N' \qquad \qquad B}$

Пусть будутъ N и N' какія нибудь двѣ точки на MB не лишенные массы; въ первой сосредоточена масса m , во второй m' .

Я говорю, что, не измѣняя ни одного изъ нашихъ данныхъ, можно часть μ массы $m + m'$ перенести въ точку A , а другую часть $\nu = m + m' - \mu$ въ нѣкоторую точку P , лежащую между N и N' .

Для этой цѣли нужно удовлетворить только уравненіямъ:

$$\mu + \nu = m + m'$$

$$\nu z = m y + m' y'$$

$$\nu z^2 = m y^2 + m' y'^2,$$

гдѣ

$$z = AP, y = AN, y' = AN'.$$

Уравненія же эти даютъ:

$$z = \frac{m y^2 + m' y'^2}{m y + m' y'}, y' - z = \frac{m y (y' - y)}{m y + m' y'} > 0, z - y = \frac{m' y' (y' - y)}{m y + m' y'} > 0$$

$$\nu = \frac{(m y + m' y')^2}{m y^2 + m' y'^2}, \mu = m + m' - \nu =$$

$$= \frac{(m + m') (m y^2 + m' y'^2) - (m y + m' y')^2}{m y^2 + m' y'^2} = \frac{m m' (y' - y)^2}{m y^2 + m' y'^2} > 0.$$

И такъ, дѣйствительно указанное нами преобразование возможно и притомъ увеличиваетъ массу отрѣзка AM .

Отсюда заключаемъ, что при максимумѣ массы AM на MB можетъ находиться только одна точка N , нелишенная массы.

При этомъ точку M мы причисляемъ къ AM , а не къ MB .

2) На отрѣзкѣ AM , не считая концовъ его, имѣемъ двѣ или болѣе точекъ N .

$\overline{A \quad N \quad P \quad N' \quad M \quad B}$

Пусть будутъ N и N' двѣ нелишенные массы точки на AM .

Разсуждая по прежнему, всю массу этихъ точекъ можно сосредоточить въ A и въ нѣкоторой точкѣ P на NN' , причемъ всѣ наши данныя равно какъ и масса AM останутся безъ измѣненія.

Отсюда заключаемъ, что вся масса AM можетъ быть сосредоточена въ концахъ A и M и еще въ нѣкоторой точкѣ этого отрѣзка.

3) Пусть не лишены массы на AM нѣкоторая точка N и на MB нѣкоторая точка N' , причемъ N не совпадаетъ ни съ A ни съ M и N' не совпадаетъ съ M .

$\overline{A \quad N \quad M \quad N' \quad B}$

Я говорю, что можно сосредоточить въ A и M или всю массу N съ частью массы N' или часть массы N и всю массу N' .

Для доказательства обозначимъ массу N черезъ m , массу N' черезъ m' , а разстоянія AN и AN' соотвѣтственно буквами y и y' .

За-тѣмъ опредѣлимъ два числа

$$m_0 = \frac{y'(y' - x)}{y(x - y)} m' \quad \text{и} \quad m'_0 = \frac{y(x - y)}{y'(y' - x)} m.$$

При этомъ навѣрно окажется, что

$$\text{либо } m_0 \leq m \text{ либо } m'_0 \leq m'$$

такъ какъ

$$m_0 m'_0 = m m'.$$

Въ первомъ случаѣ не трудно убѣдиться, что вся масса m' , сосредоточенная въ N , съ массою m_0 , находящеюся въ N , могутъ быть размѣщены на точки A и M ; а именно, на точку A придется масса

$$\frac{m_0 m' (y' - y)^2}{m_0 y^2 + m' y'^2},$$

а на точку M масса

$$\frac{(m_0 y + m' y')^2}{m_0 y^2 + m' y'^2}.$$

Точно такъ-же при

$$m'_0 \leq m'$$

всю массу m точки N съ массою m'_0 , находящеюся въ N' , можно разложить на точки A и M , при чемъ на точку A придется масса

$$\frac{m m'_0 (y' - y)^2}{m y^2 + m'_0 y'^2},$$

а на M масса

$$\frac{(m y + m'_0 y')^2}{m y^2 + m'_0 y'^2}.$$

Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ указанное нами преобразование не измѣняетъ данныхъ и увеличиваетъ массу отръзка AM .

И такъ, не нарушая ни одного изъ нашихъ данныхъ и не уменьшая массы AM , можно сосредоточить всю массу AB въ концахъ A и M отрѣзка AM и еще въ нѣкоторой точкѣ N .

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ такое сосредоточеніе массы AB мы будемъ считать выполненнымъ.

Рѣшеніе.

Обозначимъ разстояніе AN буквою y , а массы точекъ A , M и N соотвѣтственно буквами

$$a, b, m.$$

Величины эти должны удовлетворять тремъ уравненіямъ:

$$a + b + m = p$$

$$bx + my = pd$$

$$bx^2 + my^2 = k + pd^2,$$

которыя однако не опредѣляютъ ихъ вполне.

Остающаюся здѣсь неопредѣленностью надо воспользоваться такъ, чтобы масса AM достигала наибольшей величины.

Для этой цѣли, считая y даннымъ, рѣшимъ наши уравненія относительно a , b и m .

Такимъ образомъ получимъ:

$$b = \frac{pdy - (k + pd^2)}{x(y - x)} = \frac{(k + pd^2) - pdy}{x(x - y)}$$

$$m = \frac{(k + pd^2) - pdx}{y(y - x)} = \frac{pdx - (k + pd^2)}{y(x - y)}$$

$$a = \frac{pxy + k + pd^2 - pdx - pdy}{xy}.$$

По самому существу вопроса

$$a, b \text{ и } m$$

должны быть числами положительными.

Поэтому

$$y < x \text{ при } pdx - (k + pd^2) > 0$$

и

$$y > x \text{ при } pdx - (k + pd^2) < 0;$$

если же

$$pdx - (k + pd^2) = 0,$$

то вся масса AB может быть сосредоточена въ точкахъ A и M .

Отсюда нетрудно заключить, что при

$$x \geq d + \frac{k}{pd}$$

высшій предѣлъ для массы AM равняется массѣ p всей прямой AB .

Если же

$$x < d + \frac{k}{pd},$$

то на отрѣзкѣ AM расположена только масса

$$a + b = p - m = p - \frac{(k + pd^2) - pdx}{y(y - x)};$$

чѣмъ больше y , тѣмъ масса эта больше.

Что-же касается y , то эта величина ограничивается только двумя неравенствами.

$$y \leq l$$

$$a = \frac{pxy + k + pd^2 - pdx - pdy}{xy} \geq 0.$$

Если теперь

$$pxl + k + pd^2 - pdx - pdl \geq 0, \text{ т. е. } x \geq d - \frac{k}{p(l - d)},$$

то наибольшее возможное значеніе

$$a + b = p - \frac{(k + pd^2) - pdx}{y(y-x)}$$

соотвѣтствуетъ $y = l$ и равняется

$$p - \frac{(k + pd^2) - pdx}{l(l-x)} = \frac{p(l-d)(l+d-x) - k}{l(l-x)}.$$

Если-же

$$pxl + k + pd^2 - pdx - pdl < 0, \text{ т. е. } x < d - \frac{k}{p(l-d)},$$

то наибольшее возможное значеніе $a + b$ соотвѣтствуетъ тому значенію y , при которомъ

$$pxy + k + pd^2 - pdx - pdy$$

обращается въ нуль, т. е.

$$y = \frac{k + pd^2 - pdx}{p(d-x)}.$$

Подставляя это значеніе y въ нашу формулу

$$a + b = p - \frac{(k + pd^2) - pdx}{y(y-x)},$$

получаемъ для высшаго предѣла массы AM такое выраженіе

$$p - \frac{(k + pd^2) - pdx}{\frac{k + pd^2 - pdx}{p(d-x)} \cdot \frac{k + p(d-x)^2}{p(d-x)}} = p - \frac{p^2(d-x)^2}{k + p(d-x)^2} = \frac{kp}{k + p(d-x)^2}$$

И такъ

при $x \geq d + \frac{k}{pd}$ высшій предѣлъ для массы AM равенъ p

при $d + \frac{k}{pd} > x \geq d - \frac{k}{p(l-d)}$ » » » » $\frac{p(l-d)(l+d-x) - k}{l(l-x)}$

при $d - \frac{k}{p(l-d)} > x$ » » » » $\frac{kp}{k + p(d-x)^2}.$

Подобными же разсужденіями можно было бы опредѣлить и низшій предѣлъ для массы AM ; но такой предѣлъ можно найти гораздо проще, такъ какъ онъ соотвѣтствуетъ maximum-у массы MB .

Слѣдовательно, все сводится къ опредѣленію высшаго предѣла массы MB .

И на основаніи предыдущаго заключаемъ, что*

при $l - x \geq l - d + \frac{k}{p(l-d)}$ высшій предѣлъ массы MB равняется p

при $l - d + \frac{k}{p(l-d)} > l - x \geq l - d - \frac{k}{pd}$

высшій предѣлъ для массы MB равенъ $p - \frac{k + p(l-d)(x-d)}{lx}$

и наконецъ при $l - d - \frac{k}{pd} > l - x$

высшій предѣлъ для массы MB равенъ $p - \frac{p^2(d-x)^2}{k + p(d-x)^2}$

И такъ,

при $x > d + \frac{k}{pd}$ низшій предѣлъ для массы AM равенъ $\frac{p^2(d-x)^2}{k + p(d-x)^2}$

при $d + \frac{k}{dp} \geq x > d - \frac{k}{p(l-d)}$ » » » » » $\frac{k + p(l-d)(x-d)}{lx}$

и при $d - \frac{k}{p(l-d)} \geq x$ » » » » » нулю.

Всѣ эти результаты мы находимъ и въ замѣткѣ П. Л. Чебышева.

Замѣтимъ здѣсь кстати, что всѣ неравенства для x можно писать и съ двумя знаками, такъ какъ при $x = d + \frac{k}{pd}$

* Надо замѣнить x на $l - x$ и d на $l - d$.

$$p = \frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)} \quad \text{и} \quad \frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2} = \frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx}$$

а при $x = d - \frac{k}{p(l-d)}$

$$\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)} = \frac{kp}{k+p(d-x)^2} \quad \text{и} \quad \frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx} = 0.$$

С. Петербургъ.

1883.