

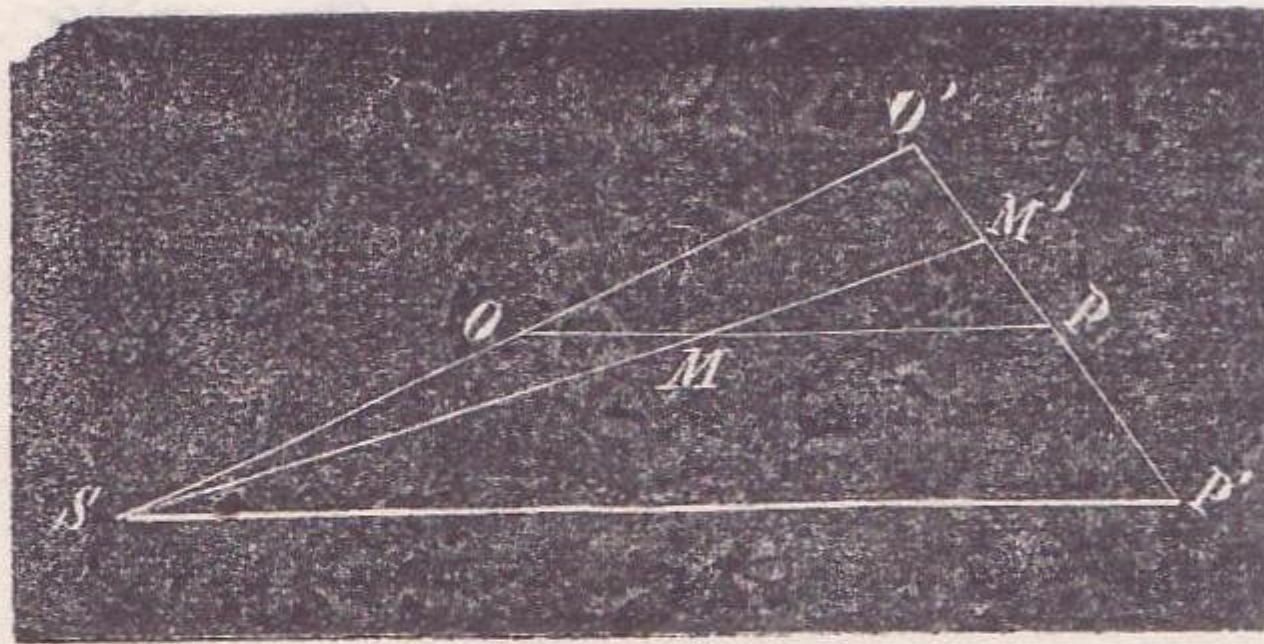
Приложеніе.

З А М Ъ Т К А

объ одномъ вопросѣ графическаго исчисленія.

О. П. Фролова.

Положимъ, что намъ данъ какой-нибудь треугольникъ $SO'P'$ (фиг. 1-я), и пусть OP будетъ прямая, соединяющая середины двухъ сторонъ его SO' и $O'P'$. Проведемъ чрезъ вершину S прямую линію такъ, чтобы она отсѣкала на прямой OP отрѣзокъ OM , относящійся къ OP , какъ a къ b . Спрашивается, какую часть $O'M'$ отсѣкаетъ та-же самая прямая на сторонѣ $O'P'$, т. е. въ какомъ отношеніи будутъ находиться отрѣзки $O'M'$ и $O'P'$?



Фиг. 1-я.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ устанавливается изъ подобія треугольниковъ $SM'P'$ и $MM'P'$. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе этого подобія имѣемъ

$$\frac{SP'}{M'P'} = \frac{MP}{M'P} = \frac{SP' - MP}{M'P' - M'P} = \frac{SP' - 2MP}{M'P' - 2M'P}$$

но изъ чертежа видно, что

$$SP' - MP = 2OP - MP = OM + OP$$

$$SP' - 2MP = 2(OP - MP) = 2OM$$

$$M'P - M'P = PP' = O'P = \frac{1}{2} O'R$$

$$M'P - 2M'P = O'P - M'P = O'M'$$

слѣдовательно, имѣемъ пропорцію

$$\frac{OM + OP}{O'R} = \frac{2OM}{O'M'}$$

откуда, перемѣстивъ крайніе члены и раздѣливъ обѣ части на 2, получимъ

$$\frac{O'M'}{O'R} = \frac{OM}{OM + OP}$$

По условію

$$\frac{OM}{OP} = \frac{a}{b} \text{ или } OM = \frac{a}{b} OP,$$

слѣдовательно

$$\frac{O'M'}{O'R} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{a}{a+b}.$$

Если положимъ $OP = O'R = 1$ и назовемъ дробь $\frac{a}{b}$ чрезъ k ,

то будемъ имѣть

$$OM = k \quad \text{и} \quad O'M' = \frac{k}{k+1}.$$

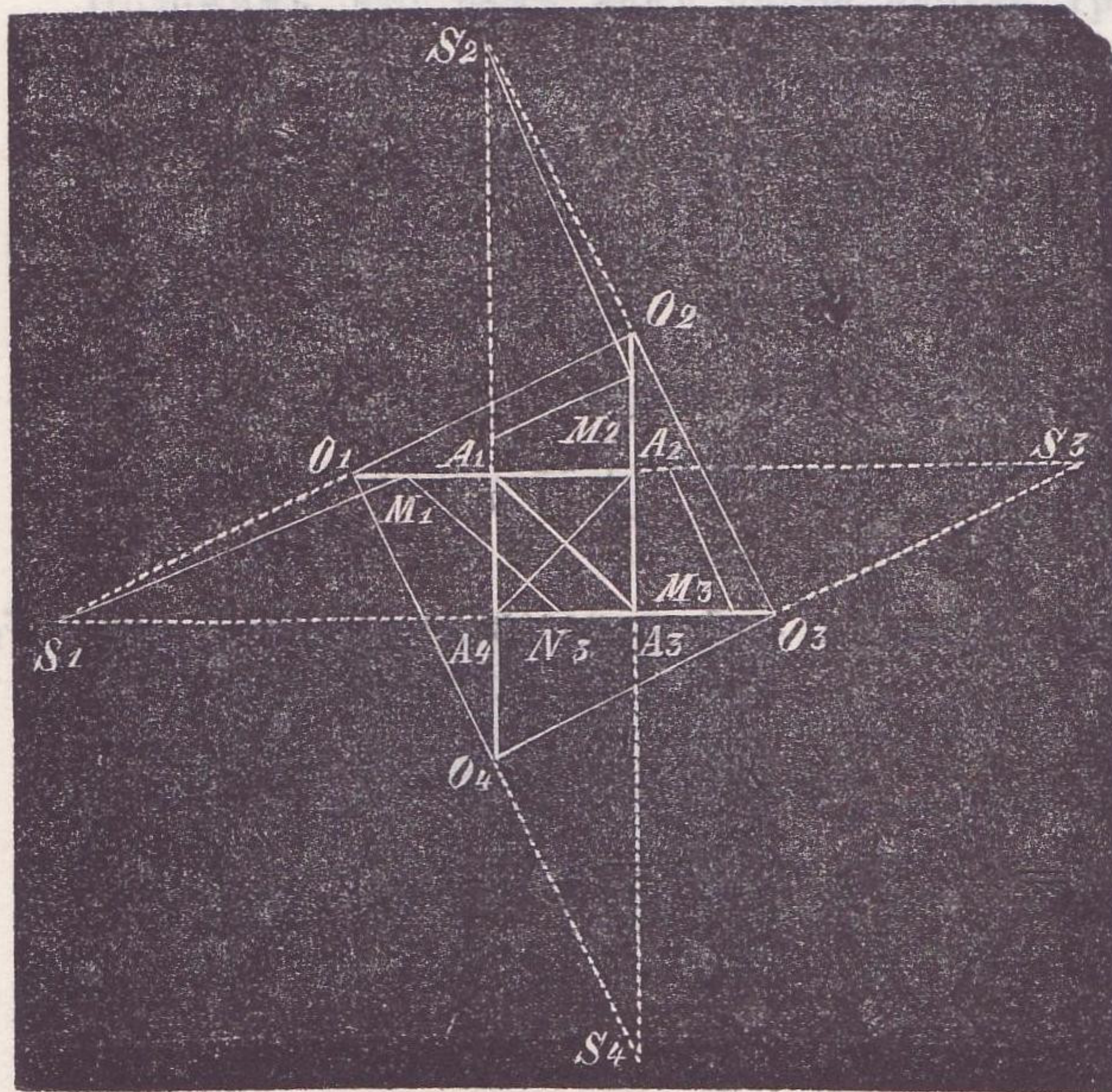
Найденнымъ соотношеніемъ между длинами OM и $O'M'$ можно воспользоваться для того, чтобы посредствомъ весьма простого и однообразнаго графическаго процесса построить какую угодно раціональную дробь, т. е. такую длину, которая относилась бы къ длинѣ, принятой за единицу, какъ два какія-нибудь цѣлыя числа m и n ¹.

Съ этою цѣлью построимъ квадратъ $A_1A_2A_3A_4$, сторона котораго равняется $\frac{1}{2}$ (фиг. 2-я).

Продолжимъ стороны этого квадрата въ одномъ и томъ-же круговомъ направленіи до точекъ O_1, O_2, O_3, O_4 такъ, чтобы было

$$O_1A_1 = O_2A_2 = O_3A_3 = O_4A_4 = \frac{1}{2}.$$

Точки O_1, O_2, O_3, O_4 будутъ вершинами другого квадрата,



Фиг. 2-я.

котораго стороны пересѣкаются еще со сторонами перваго квадрата въ точкахъ S_1, S_2, S_3, S_4 .

Стороны квадратовъ $A_1A_2A_3A_4$ и $O_1O_2O_3O_4$ и ихъ точки пересѣченія послужатъ намъ основаніемъ или, такъ сказать, механизмомъ, при по-

¹ Числа m и n нужно, вообще говоря, предполагать очень большими, первыми между собою и притомъ $m < n$.

средствѣ котораго выполняется названный графическій процессъ.

Самый же процессъ этотъ состоитъ въ повтореніи въ опредѣленномъ числѣ и опредѣленной послѣдовательности двухъ слѣдующихъ элементарныхъ графическихъ операцій.

1. *Проектирование числа.* Возьмемъ произвольную точку M_1 на прямой O_1A_2 между точками O_1 и A_2 . Расстояніе O_1M_1 будетъ имѣть нѣкоторую величину меньшую единицы. Если проведемъ изъ S_1 прямую, проектирующую точку M_1 на прямую O_2A_3 , то получимъ на этой послѣдней точку M_2 , которой расстояние отъ O_2 будетъ имѣть также опредѣленную величину. Такое графическое опредѣленіе величины O_2M_2 по величинѣ O_1M_1 мы будемъ называть *проектированиемъ* послѣдней величины.

Такъ-какъ въ треугольникѣ $S_1O_2A_3$ сторона O_2A_3 равняется прямой O_1A_2 , соединяющей середины двухъ сторонъ, и есть единица, то убѣждаемся изъ предыдущаго, что если O_1M_1 есть нѣкоторое число k , то O_2M_2 есть число $\frac{k}{k+1}$. Это значитъ, что *результатъ проектированія какого-нибудь числа есть отношеніе этого числа къ числу единицею большему.*

Величину O_2M_2 можно проектировать изъ точки S_2 на слѣдующую сторону квадрата $A_1A_2A_3A_4$ такъ-же точно какъ O_1M_1 проектировалась изъ точки S_1 . Затѣмъ полученную величину можно проектировать изъ точки S_3 и т. д.

Если, имѣя первоначально величину k , мы произведемъ надъ нею проектированіе n разъ сряду, то въ результатъ получится величина

$$\frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{3k+1} \cdots \frac{(n-1)k+1}{nk+1} = \frac{k}{nk+1}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $k = O_1 A_2 = 1$, въ результатѣ послѣдовательныхъ проектированій получаются дроби $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Когда k есть раціональная дробь $\frac{a}{b}$, то въ результатѣ n -краткаго проектированія получается дробь $\frac{a}{na+b}$. Слѣдовательно, результатъ n -кратнаго проектированія дроби есть дробь, у которой числитель равняется числителю данной дроби, а знаменатель больше знаменателя данной дроби на числителя, повтореннаго n разъ.

2. Перенесеніе числа.— Проведемъ чрезъ точку M_1 , опредѣляющую величину $O_1 M_1$ меньшую единицы, прямую параллельную діагонали $A_1 A_3$ квадрата $A_1 A_2 A_3 A_4$. Точкой пересѣченія N_3 этой прямой съ противоположною стороною квадрата опредѣлится величина $O_3 N_3$. Такое графическое опредѣленіе величины $O_3 N_3$ по величинѣ $O_1 M_1$ мы будемъ называть перенесеніемъ послѣдней на противоположную сторону квадрата или просто перенесеніемъ величины.

Такъ-какъ очевидно, что $O_1 M_1 + O_3 N_3 = O_1 A_2 = 1$, то можно сказать, что результатъ перенесенія какого-нибудь числа меньшаго единицы есть число дополнительное съ нимъ до единицы.

Построение всякой рациональной дроби при помощи *проектирования* и *перенесения* может быть достигнуто слѣдующимъ образомъ.

Всякую рациональную дробь $\frac{m}{n}$ можно представить въ видѣ

$$p + \frac{m'}{n'}$$

гдѣ p , m' и n' суть цѣлыя числа. Допустивъ, что дробь $\frac{m'}{n'}$ уже построена и произведя надъ нею одинъ разъ проектирование и одинъ разъ перенесение, получимъ дробь

$$1 - \frac{m'}{m' + n'} = \frac{n'}{m' + n'}$$

Произведемъ затѣмъ еще $(p-1)$ разъ проектирование, получимъ

$$\frac{n'}{m' + n' + (p-1)n'} = \frac{n'}{m' + pn'} = \frac{1}{p + \frac{m'}{n'}}$$

т. е. данную дробь $\frac{m}{n}$.

Дробь $\frac{m'}{n'}$, въ свою очередь, можетъ быть представлена въ

видѣ

$$q + \frac{m''}{n''}$$

и, слѣдовательно, построена указаннымъ сейчасъ образомъ, когда

построена дробь $\frac{m''}{n''}$.

Продолжая рассуждать такимъ образомъ, мы убѣждаемся, что построение всякой непрерывной дроби

$$\frac{1}{p + \frac{1}{q + \dots}}$$

$$+ \frac{1}{v}$$

достигается при помощи ряда послѣдовательныхъ проектированій и перенесеній, какъ-скоро построена дробь $\frac{1}{v}$. Но мы уже видѣли, что эта дробь строится посредствомъ $(v - 1)$ кратнаго проектированія единицы.

Возьмемъ частный примѣръ. Пусть требуется построить дробь $\frac{79}{337}$, которая разлагается въ слѣдующую непрерывную

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}}$$

Произведя 7 разъ проектированіе единицы, получимъ $\frac{1}{8}$, послѣ чего перенесеніе дастъ

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Проектируя затѣмъ эту дробь два раза и перенеся полученный результатъ, найдемъ

$$1 - \frac{7}{2 \cdot 7 + 8} = 1 - \frac{7}{22} = \frac{15}{22}$$

Проектируя эту дробь 5 разъ и перенеся результатъ, получимъ

$$1 - \frac{15}{5 \cdot 15 + 22} = 1 - \frac{15}{97} = \frac{82}{97}.$$

Проектируя эту дробь одинъ разъ и перенеся результатъ, получимъ

$$1 - \frac{82}{82 + 97} = 1 - \frac{82}{179} = \frac{97}{179}.$$

Проектируя наконецъ эту послѣднюю дробь два раза, получимъ

$$\frac{97}{2 \cdot 97 + 179} = \frac{97}{373}.$$

Изъ всего сказаннаго видимъ, что рассматриваемый графическій процессъ построения дроби, однообразный во всѣхъ частныхъ случаяхъ, состоитъ въ сущности въ проведеніи приличнымъ образомъ одной непрерывной ломанной линіи, вершины угловъ которой находятся на сторонахъ квадрата $A_1 A_2 A_3 A_4$ и которая обвертывается, такъ сказать, около этого квадрата, подобно непрерывной нити, обвертывающей клубокъ.

Въ предложенномъ примѣрѣ эта ломанная состоитъ изъ 20 прямолинейныхъ частей.