

$$D = \begin{vmatrix} \zeta_{a_1}^{p_1} & \dots & \zeta_{a_k}^{p_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta_{a_1}^{p_k} & \dots & \zeta_{a_k}^{p_k} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} a_j = 0, 1, \dots, p-1; a_1 < a_2 < \dots < a_k \\ p_i = 0, 1, \dots, p-1; p_1 < p_2 < \dots < p_k \end{array} \right)$$

якийнебудь мінор розгляданого детермінанта Vandermonde'a.

На підставі леми II ми маємо

$$D = V(\zeta_{a_1}, \dots, \zeta_{a_k}) \sum_{i=1}^{n_k} \zeta_{a_1}^{a_i} \zeta_{a_2}^{\beta_i} \dots \zeta_{a_k}^{\lambda_i}. \quad (3)$$

Але $V(\zeta_{a_1}, \dots, \zeta_{a_k})$ напевно відмінне від нуля; отже, якщо ми припустимо, що $D=0$, то матимемо рівняння

$$S = \sum_{i=1}^{n_k} \zeta_{a_1}^{a_i} \zeta_{a_2}^{\beta_i} \dots \zeta_{a_k}^{\lambda_i} = 0. \quad (3')$$

Тому що кожний з виразів $\zeta_{a_1}^{a_i} \zeta_{a_2}^{\beta_i} \dots \zeta_{a_k}^{\lambda_i}$ збігається з одною з величин ζ^k ($k=0, 1, \dots, p-1$), то (3) після спрощення зводиться до виду

$$\sum_{i=0}^{p-1} c_i \zeta^i = 0, \quad (4)$$

де c_i — цілі додатні числа, сума яких дорівнює n_k , тобто

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_{p-1} = \frac{\prod_{j>i} (p_j - p_i)}{1! 2! \dots (k-1)!} \quad (4')$$

ζ задовольняє незвідне рівняння

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{p-1} = 0, \quad (4'')$$

а значить, коефіцієнти рівняння (4'') повинні бути пропорціональні коефіцієнтам цього рівняння, тобто всі c_i повинні бути рівні між собою. Але якщо $c_0 = c_1 = \dots = c_{p-1}$, то права частина рівності (4) повинна ділитися на p , що, очевидно, неможливе, бо $0 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k < p$.

§ 2

Тому що нам не удалось знайти в літературі тверджень, названих лемами I і II, то ми дозволимо собі навести тут їх доведення.

Доведення леми I. При $k=2$ за q_1 можна взяти кожне з чисел p_1, p_1+1, \dots, p_2-1 ; отже, $n_2 = p_2 - p_1$, і в цьому випадку твердження справджується.

Тому припустимо, що лема справедлива для $k-1$, тобто що

$$n_{k-1} = \frac{V(q_1, q_2, \dots, q_{k-1})}{V(1, 2, \dots, k-1)}$$

для яких завгодно цілих чисел $q_1 < q_2 < \dots < q_{k-1}$.

Якщо тепер виходити з чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, то за q_j можна взяти кожне з чисел $p_j, p_j+1, \dots, p_{j+1}-1$, незалежно від значень всіх інших q_i ($i=1, 2, \dots, k-1$). Отже

$$n_k = \sum_{q_1=p_1}^{q_1=p_2-1} \dots \sum_{q_{k-1}=p_{k-1}}^{q_{k-1}=p_k-1} \frac{V(q_1, q_2, \dots, q_{k-1})}{V(1, 2, \dots, k-1)} =$$

$$= \frac{1}{V(1, \dots, k-1)} \begin{vmatrix} 1 + \dots + 1 & \dots & 1 + \dots + 1 \\ p_1 + \dots + (p_2 - 1) & \dots & p_{k-1} + \dots + (p_k - 1) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_1^{k-2} + \dots + (p_2 - 1)^{k-2} & \dots & p_{k-1}^{k-2} + \dots + (p_k - 1)^{k-2} \end{vmatrix}$$

Але з тотожності

$$p_i^l - p_{i-1}^l = \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l}{j} [p_{i-1}^j + (p_{i-1} + 1)^j + \dots + (p_i - 1)^j]$$

випливає, що

$$n_k = \frac{1}{V(1, 2, \dots, k-1) \cdot (k-1)!} \begin{vmatrix} p_2 - p_1 & \dots & p_k - p_{k-1} \\ p_2^2 - p_1^2 & \dots & p_k^2 - p_{k-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ p_2^{k-1} - p_1^{k-1} & \dots & p_k^{k-1} - p_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{V(1, 2, \dots, k)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & p_2 - p_1 & \dots & p_k - p_{k-1} \\ p_1^2 & p_2^2 - p_1^2 & \dots & p_k^2 - p_{k-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{k-1} & p_2^{k-1} - p_1^{k-1} & \dots & p_k^{k-1} - p_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{V(p_1, p_2, \dots, p_k)}{V(1, 2, \dots, k)},$$

з чого, таким чином, доведено.

Доведення леми II. Детермінант (2), очевидно, можна подати в такому вигляді:

$$W = \begin{vmatrix} x_1^{p_1} & \dots & x_k^{p_1} \\ x_1^{p_2} & \dots & x_k^{p_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{p_k} & \dots & x_k^{p_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{p_1} & x_2^{p_1} & \dots & x_k^{p_1} \\ 0 & x_2^{p_2} - x_2^{p_1} \cdot x_1^{p_2-p_1} & \dots & x_k^{p_2} - x_k^{p_1} \cdot x_1^{p_2-p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{p_k} - x_2^{p_1} \cdot x_1^{p_k-p_1} & \dots & x_k^{p_k} - x_k^{p_1} \cdot x_1^{p_k-p_1} \end{vmatrix}$$

Але, з другого боку:

$$x_i^{p_2} - x_i^{p_1} \cdot x_1^{p_2-p_1} = (x_i - x_1) \sum_{j=p_1}^{p_2-1} x_i^j x_1^{p_2-1-j}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

значить:

$$W = x_1^{p_1} (x_2 - x_1) \dots (x_k - x_1) \begin{vmatrix} \sum_{j=p_1}^{p_2-1} x_2^j x_1^{p_2-1-j} & \dots & \sum_{j=p_1}^{p_2-1} x_k^j x_1^{p_2-1-j} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=p_{k-1}}^{p_k-1} x_2^m x_1^{p_k-1-m} & \dots & \sum_{m=p_{k-1}}^{p_k-1} x_k^m x_1^{p_k-1-m} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1) \dots (x_k - x_1) \sum_{q_1=p_1}^{p_2-1} \dots \sum_{q_{k-1}=p_{k-1}}^{p_k-1} \begin{vmatrix} x_2^{q_1} & \dots & x_k^{q_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_2^{q_{k-1}} & \dots & x_k^{q_{k-1}} \end{vmatrix} x_1^{p_1 + \sum_{i=2}^k (p_i - 1 - q_{i-1})}$$

звідки випливає можливість міркувати за індукцією, а у випадку $k=2$ твердження очевидне.

RESUMÉ

Der in Rede stehende Satz lautet folgendermassen:

Ist ζ eine primitive Einheitswurzel vom Primzahlgrade p , so ist jeder Minor der Vandermondeschen Determinante $V(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1})$ von Null verschieden.

A. Ostrowski hat diesen Satz als Vermutung N. Tschebotareff mitgeteilt und Tschebotareff hat einen eleganten Beweis für den Satz gegeben (S. § 1 Fussnote ¹).

In diesem Aufsatz ist ein elementarer Beweis für den ausgesprochenen Satz gegeben, wozu zwei einfache Hilfssätze aufgestellt sind:

Hilfssatz I. Es seien $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ gegebene ganze Zahlen. Dann ist die Anzahl verschiedener Systeme ganzer Zahlen $q_1, q_2, \dots, q_{k-1}; r_1, r_2, \dots, r_{k-2}; \dots; s_1, s_2; t_1$, welche den Ungleichungen (1') genügen, gleich (1).

Hilfssatz II. Sind $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ nichtnegative ganze Zahlen, so besteht die Identität (2), (2').

Ist D ein Minor in der Rede stehenden Vandermondeschen Determinante, so besteht nach dem Hilfssatze II die Zerlegung (3') und wäre $D = 0$, so müsste die Gleichung (3) stattfinden.

Nach Vereinfachungen nimmt (3) die Gestalt (4) an, wo c_i ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe n_k ist [S. (4)]. Da ζ der irreduziblen Kreisteilungsgleichung (4'') genügt, so müssen die c_i unter einander gleich sein, was aber der Gleichung (4) widerspricht, da $0 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k < p$ ist.

§ 2 enthält Beweise der Hilfssätze I und II.

к. 583^a

Пролетарі всіх країн, єднайтеся!
Prolétaires de tous les pays, unissez-vous!

НАРОДНИЙ КОМІСАРІАТ ОСВІТИ УРСР

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. О. М. ГОРЬКОГО

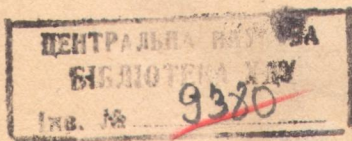
ЗАПИСКИ
НАУКОВО-ДОСЛІДНОГО ІНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКИ й МЕХАНІКИ
I
ХАРКІВСЬКОГО МАТЕМАТИЧНОГО
ТОВАРИСТВА

СЕРІЯ 4
ТОМ XIV

1937
COMMUNICATIONS

DE L'INSTITUT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUES DE L'UNIVERSITÉ
DE KHARKOFF ET DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE KHARKOFF

SÉRIE 4, t. XIV



ОНТИ

ДЕРЖАВНЕ

НКТП

НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ

Харків

1937

64 17999/14