Логіка першого порядку — формальне доведення

Власенко Д. І. Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

Травень — 2015

Зміст

1 Синтаксис та семантика логіки висловлень — формули та їх інтерпретації

Математика вивчає світ за допомогою формул, їх перетворень, та зв'язки між дійсністю та формулами. При цьому "дійсність" може бути частиною життя математики. Якщо ми слідкуємо за правильністю запису формул та за правильністю їх перетворень, то ми маємо справу із синтаксисом. Якщо ж нас цікавить той зміст, який стоїть за формулами, то ми маємо справу із семантикою. Процес надання формулам змісту називають інтерпретацією. Формули розглядаються як певні послідовності певних символів. Якщо вам сказано "Вдягни пальто", то ми маємо певну послідовність букв, з точки зору синтаксису це нормальне, правильно оформлене речення (формула). Надання реченню "Вдягни пальто" змісту "На вулиці холодно, потрібно вдягти щось тепліше", це інтерпретація формули (речення). В різних логіках розглядають різні допустимі формули, і різні інтерпретації.

Найгрубіше, найпростіше наближення до дійсності, до справді працюючого мислення, дає логіка висловлень. Логіка висловлень займає серед інших логік приблизно те ж місце, що і арифметика натуральних чисел від 1 до 10 в арифметиці — хто не вміє працювати з цілими числами 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10, тому нема чого робити в арифметиці. Але і називати ці уміння наукою — певне перебільшення.

При побудові формул логіки висловлень використовують

- пропозиційні символи $a, b, c, \ldots, p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$;
- пропозиційні сталі 0 та 1;
- символи логічних зв'язок — $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$;
- допоміжні символи — дужки, коми та подібне.

Всі символи вказаних чотирьох типів утворюють алфавіт логіки висловлень.

Утворюємо послідовності символів алфавіту логіки висловлень — так звані слова в алфавіті. Деякі слова є формулами логіки висловлень. Точніше, формули логіки висловлень мають наступне індуктивне означення.

Визначення 1.1 *Кожен пропозиційний символ і кожна пропозиційна стала є формулою (база індуктивного означення).*

Припустимо, що нам уже відомо, що слова A, B є формулами (індуктивне припущення). Тоді слова

$$(\neg A); \tag{1}$$

$$(A \wedge B); \tag{2}$$

$$(A \vee B); \tag{3}$$

$$(A \Rightarrow B); \tag{4}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \tag{5}$$

є формулами (індуктивний перехід). Інших формул, крім тих, що можуть бути побудовані за допомогою бази індуктивного означення та індуктивного переходу, немає.

Отже, формули будуються по кроках. На першому кроці беруться найпростіші, або, як кажуть, атомарні, неподільні формули — це пропозиційні символи та пропозиційні сталі. А на кожному наступному кроці будуються нові формули, використовуючи вже наявні формули за дпопомогою правил (1), (2), (3), (4), (5). При цьому неможливо одержати формулу іншим якимось шляхом.

Щоб підкреслити, що при побудові нових формул із старих дозволені всі побудови (1), (2), (3), (4), (5), кажуть, що будуються формули над множиною логічних зв'язок $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Часто дозволені способи побудови нових формул із старих обмежуються лише правилами (1), (2), (3). Тоді кажуть про формули над множиною зв'язок $\neg, \wedge, \vee$.

Існують домовленості про пропускання дужок — ті ж самі, що і при побудові формул, що задають булеві функції[1].

За найгрубішим наближенням до дійсності суттєвим у сказаному є лише істинність чи хибність сказаного. Тому інтерпретацією пропозиційної змінної є присвоєння їй істиносного значення — істина 1, або хибність 0. Звичайно, істиність формули, що складається лише із пропозиційного символу, і істиність цього символа — це одне і те ж. Істиність сталої і сама стала також одне і те ж. Якщо відомі істиносні значення формул A, B, то істиність формул, які утворені за допомогою правил (1) — (5), визначається за допомогою наступної таблиці

[1] Вважаємо, що знайомство з булевими функціями уже відбулося.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Визначення 1.2 *Формули, що мають одне і те ж істиносне значення при будь-якій інтерпретації, називають рівносильними. Рівносильні формули з'єднують знаком =. Формули, що рівносильні 1, називають тавтологіями.*

Є таблиця основних рівносильностей. Наведемо її.

- $p \wedge p = p$ — ідемпотентність $\wedge$;
- $p \vee p = p$ — — ідемпотентність $\vee$;
- $p \wedge q = q \wedge p$ — комутативність $\wedge$;
- $p \vee q = q \vee p$ — комутативність $\vee$;
- $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ — асоціативність;
- $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ — асоціативність;
- $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$ — переписування імплікації через заперечення та диз'юнкцію;
- $(p \wedge q) \vee r = (p \vee q) \wedge (q \vee r)$ — дистрибутивність;
- $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ — дистрибутивність;
- $\neg\neg p = p$ — подвійне заперечення;
- $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ — закон де Моргана;
- $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ — закон де Моргана;

- $1 \wedge p = p$, $1 \vee p = 1$, $0 \wedge p = 0$, $0 \vee p = p$ — визначення констант.
- $(p \wedge q) \vee p = p$, $(p \vee q) \wedge p = p$, — поглинання.

Вказані рівносильності доводяться побудовою відповідних таблиць істиності. Таблиці істиності формул природно вивчають в розділі "булеві функції" і зупинятися на цьому, відповідно, на доведенні основних рівносильностей логіки висловлень не будемо.

2 Числення секвенцій

Неформально, змістовно, доведення ми уявляємо як висування припущень, потім із припущень одержуємо висновки. Можна також уявити, що на кожному кроці доведення ми кажемо одне з двох:

- "Припущення правильні — це є самоочевидним, якось обгрунтовувати це не будемо."
- "Якщо припущення правильні, то правильним буде висновок".

При доведенні використовується сполучник "Якщо ... то", але не для побудови формул, а для роботи з формулами. Тут виникає певна незручність — для сполучника "Якщо ... то" є стале позначення, але він використовується в невідповідному місці. Уявимо собі годинник, який використовується як важок на вудці — як нам називати тепер цю річ: таки ж годинник, чи просто важок.

Сказане є поясненням того, що в математичній логіці

- є формалізації доведення, які використовують виключно ті ж знаки, що використовуються при побудові формул — так зване числення висловлювань,

- і є формалізації доведення, які для сполучника "Якщо ... то" вводять новий знак — $\vdash$. Цей знак можна назвати знаком доведення, штопором, шваброю, чи ще якось — сталої назви для нього немає. Знак $\vdash$ використовується в формальних доведеннях і не використовується при побудові формул.

2.1 Знак доведення і вивідні послідовності

Визначення 2.1 *Формалізація доведення, яке використовує знак $\vdash$, називаєтся численням секвенцій*[2]

В мовному оточенні доведення знак $\vdash$ читаєтся як зворот "в припущені, що ..., можна довести, що..."

Коли позначити висловлення "число 18 є парним" через p, висловлювання "Число 18 ділиться на 3" через q, а висловлення "Число 18 є парним і воно ділиться на 3" через $p \wedge q$, то міркування: "В припущенні, що справді 18 є парним числом і справді число 18 ділиться на 3, можна довести, що число 18 є парним і ділиться на 3" можна записати у вигляді такої послідовності символів:

$$p, q \vdash p \wedge q.$$

Перед знаком $\vdash$ пишуть, відділяючи одне від іншого комою, припущення, а після знака $\vdash$ пишуть те висловлення, яке можна довести. Запис

$$a_1, a_2, a_3 \vdash a$$

читається так: "В припущенні, що висловлення a_1, a_2, a_3 вже доведені, можна довести a". Оскільки висловлення в загальному випадку означаються формулами логіки висловлень, то в загальному випадку ми перед знаком $\vdash$ матимемо кілька формул, а справа — одну.

[2]sequence — англійською мовою означає послідовність

Для запису того, що припущення, які задані формулами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, суперечливі, використовують таку послідовність

$$a_1, a_2, \ldots a_n \vdash,$$

а для запису того, що формулу a можна довести без будь-яких припущень, використовують послідовність

$$\vdash a.$$

Визначення 2.2 *Запис*

$$a_1, a_2, ..., a_n \vdash a,$$

де $a_1, a_2, ..., a_n, \quad (n \geq 1)$ *— кілька формул,* a *— деяка формула, називається вивідною послідовністю або секвенцією.*

Вивідними послідовностями є також записи

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \vdash$$

та

$$\vdash a,$$

де через $a_1, a_2, ..., a_n,$ *позначені деякі формули.*

Приклад 2.1 *Прикладами вивідних послідовностей будуть*

$$a \wedge b, b \wedge c \vdash a \wedge c \; ; \qquad a, a \wedge b \vdash b \; ; \qquad a, \neg a, b \vdash b.$$

Також вивідними послідовностями будуть послідовності символів

$$a \wedge \neg a \vdash, \qquad b, a, a \; \neg b \vdash,$$

та послідовності (слова)

$$\vdash a \Rightarrow a, \qquad \vdash a \vee \neg a, \qquad \vdash \neg(a \wedge \neg a).$$

2.2 Аксіоми числення секвенцій

Наведемо приклади очевидних міркувань, настільки очевидних, що про це не варто і говорити:

> "Якщо припустити, що в річках тече вода, то можна довести, що в річках тече вода";
>
> "Якщо припустити, що мушлі — молюски, то можна довести, що мушлі — молюски";
>
> "Якщо припустити, що всі крокодили вміють літати, то можна довести, що всі крокодили вміють літати".

В наведених прикладах є така закономірність. Ми припускаємо, що висловлення правильне, а потім стверджуємо, що це висловлювання (при такому припущенні) можна довести. Це самоочевидний спосіб міркувань, або міркування по замкненому колу. Висловлення ми уміємо записувати у вигляді формул. І попередні приклади за допомогою символів можуть бути записані так:

$$a \vdash a.$$

Більш правильне міркування, ніж $a \vdash a$, важко уявити. І обгрунтувати якось цю правильність, користуючись чимось іншим, крім здорового глузду, недоцільно. Ми знаємо слово, яке означає самоочевидні істини, істини, що не підлягають доведенню. Це слово — "аксіома". Отже ми маємо такі аксіоми доведення:

Приклад 2.2 *"Припустивши, що функція непарна, можна довести, що ця функція є непарною";*

"Припустивши, що із парності числа 4 випливах парність числа 28, ми можемо довести, що із парності числа 4 випливає парність числа 28"

Загальне визначення аксіом доведення має наступний вигляд:

Визначення 2.3 *Запис*

$$A \vdash A, \tag{6}$$

де A *— деяка формула логіки висловень, називаєтьcя аксіомою доведення в логіці висловлювань.*

Запис (6) називають схемою аксіом числення секвенцій. Така словосполука підкреслює, що (6) стає аксіомою лише після того, яка замість A *підставлена певна формула логіки висловлювань.*

Приклад 2.3 *Прикладами аксіом доведення в численні секвенцій будуть*

$$a \vdash a, \qquad p \wedge q,\ (a \wedge (b \Rightarrow c)) \vdash (a \wedge (b \Rightarrow c)).$$

Аксіом доведення нескінченно багато, їх стільки ж, скільки і формул. Всі такі аксіоми загальновизнані.

Але для особистого вжитку можна написати і інші аксіоми, — їх називають позалогічними. Наприклад, ви бажаєте сповістити обчислювальній машині, що висловлювання "Число 5 натуральне" є правильним, і доведенню якомусь особливому не підлягає. Тоді ви позначаєте наведене висловлювання літерою (наприклад, a) і пишете:

$$\vdash a,$$

що читається так: "Можна довести, що число 5 натуральне". Правильність таких тверджень випливає із досвіду того, хто їх сповіщає. Тому в даному випадку $\vdash a$ буде позалогічною аксіомою доведення. Загальновизнаною аксіомою $\vdash a$ бути не може тому, що коли замість a підставити інше висловлювання, можна одержати безглуздя. Наприклад, підставивши замість a висловлення "Непарних чисел не існує " одержимо таке міркування: "Без будь-яких припущень можна довести, що непарних чисел не існує". Загальновизнаним таке міркування бути не може.

Позалогічні аксіоми зустрічаються при використанні логіки висловлеь. Але на даному етапі вивчення логіки висловлень торкатися позалогічних аксіом ми не будемо.

2.3 Правила доведення. Їх групування

Припустимо, що правильність міркування

$$a, b, a \vdash c \tag{7}$$

у нас не викликає сумніву. Чи буде у нас тоді викликати сумнів правильність міркування

$$a, b \vdash c? \tag{8}$$

Щоб дати відповідь на це питання, потрібно кілька разів замість a, b, c підставити висловлення. Зробимо це. Означимо

a — весна дружна;

b — якщо весна дружна, то буде повінь;

c — буде повінь.

ивідна послідовність (7) прочитається так: "Припустимо, що весна дружна; припустимо, що коли весна дружна, тоді буде повінь; припустимо також, що весна дружна. В такому разі можна довести, що буде повінь."

Вивідна послідовність (8) прочитається так: "Припустимо, що весна дружна; припустимо, що коли весна дружна, тоді буде повінь. В такому разі можна довести, що буде повінь."

Ми бачимо, що у вивідній послідовності (7) припущення "Весна дружна" записане зайвий раз.

Підставимо тепер замість a, b, c в (7) та (8) висловлення

a — скло прозоре;

b — кришталь прозорий;

c — келихи прозорі.

Знову бачимо, що два рази припускати прозорість скла недоцільно, можна це припустити один раз і таким чином перейти від вивідної послідовності (7) до вивідної послідовності (8). Наведені приклади, і ті приклади, які ми можемо подумки навести, показують, що правильність міркування (8) у випадку, коли міркування (7) правильне, не викликає сумніву.

Таким чином ми знємо, що від деяких вивідних послідовностей, у злагоді зі здоровим глуздом можна переходити до інших. Перехід записується у вигляді риски дробу. Над рискою пишемо від чого переходимо, а внизу — до чого переходимо. Перехід від (7) до (8) запишемо у вигляді дробу

$$\frac{a, b, a \vdash c}{a, b \vdash c}$$

Визначення 2.4 *Правило доведення — це дріб, у чисельнику якого написані одна або кілька вивідних послідовностей, а в знаменнику та одна вивідна послідовність, яку можна отримати за допомогою нашого правила.*

В розумності правил переконуються, підставляючи замість пропоозиційних символів справжні висловлення.

Приклад 2.4 *Розглянемо запис*

$$\frac{a, b \vdash c}{b, a \vdash c} \tag{9}$$

Щоб цей запис можна було взяти як правило доведення, потрібно переконатися в узгодженні його зі здоровим глуздом.

Для цього підставимо замість a, b, c — справжні висловлювання. Спочатку візьмемо

a — білий та синій — холодні кольори;

b — червоний та чорний — теплі кольори;

c — крига на картинах зображується білим та синім кольорами.

Чисельник прочитаємо тепер як “В припущенні, що білий та синій — холодні кольори, і в припущенні, що червоний та чорний — теплі кольори, можна довести, що крига на картинах зображується білим та синім кольорами“. Знаменник прочитається так: “В припущенні, що червоний та чорний — теплі кольори, і в припущенні, що білий та синій — холодні кольори , можна довести, що кригу на картинах зображають білим та синім кольором“. В знаменнику, ми бачимо, написане те ж саме, що і в чисельнику, тільки припущення переставлені. Тому коли міркування чисельника правильні, тоді правильні і міркування знаменника. В наведеному прикладі правило зі здоровим глуздом узгоджується.

Нехай тепер

a — сучасний танець — модний;

b — модний танець забувається через рік;

c — сучасний танець забувається через рік.

Підставивши наведені висловлення замість a, b, c в (9), прочитавши чисельник і знаменник, бачимо, що наведені в них міркування одночасно правильні або одночасно неправильні. І тому (9) можна взяти як правило доведення. Лишилося подумки перебрати можливі висловлення і дійти висновку, що в якому б порядку припущення не писали, висновок можна зробити той же самий, і (9) можна взяти як правило доведення.

Можна собі уявити, що правил доведення можна написати скільки завгодно. Але нам потрібні тільки основні, і то, не правила а схеми (способи утворення) правил. Основні схеми правил доведення розбиваються на 5 груп:

1-а група пояснює, що можна робити з припущеннями;

2-а група пояснює наше розуміння сполучника “якщо ..., то ...“;

3-а група пояснює наше розуміння сполучника “і“;

4-а група пояснює наше розуміння сполучника “або“;

5-а група роз’яснює застосування заперечувального звороту “неправда, що ...“ та наше розуміння суперечності.

2.4 Правила, що стосуються перетворення сукупності припущень

Підкреслимо, що сила припущення від його кількаразового повторення не збільшується. Наприклад, нехай із припущень

1) ми вивчаємо логіку;

2) якщо ми вивчаємо логіку, то будемо більш освічені;

3) ми вивчаємо логіку;

4) ми вивчаємо логіку,

можна довести, що

5) будемо більш освічені.

Тоді той же висновок — “Будемо більш освічені“ можна одержати не повторюючи кілька разів “Ми вивчаємо логіку“, досить це зробити один раз. В справжньому житті інколи приходиться повторювати речення кілька разів, чи то для більшої переконливості, чи щоб більше звернути увагу. Але в математичній логіці висловлення не бувають більше чи менше переконливими — вони бувають правильні і не правильні. Також міркування не бувають більше чи менше переконливі — вони також бувають тільки цілком правильні, або цілком неправильні. Сказаним ми обґрунтували, що кілька разів повторене припущення можна замінити одним, від цього висновок не втратить чинності. Ця схема правил (правил вилучення повтореного припущення) символьно записується так:

$$\frac{a_1, a_2, ..., a_n, a, a, b_1, b_2, ..., b_m \vdash c}{a_1, a_2, ..., a_n, a, b_1, b_2, ..., b_m \vdash c} \tag{10}$$

де $a_1, a_2, ..., a_n, a, , b_1, b_2, ..., b_m, c$ $(n, m \geq 0)$ — певні формули.

Підставивши в (10) конкретні формули ми одержуємо окремий випадок схеми правил, тобто правило.

Приклад 2.5 *Окремі правила можуть бути такі :*

$$\frac{a, a \vdash c}{a \vdash c}, \quad \frac{a, a, b \vdash c}{a, b \vdash c}, \quad \frac{b, a, a \vdash c}{b, a \vdash c}, \quad \frac{a, b, b, c \vdash d}{a, b, c \vdash d}.$$

Правило вилучення повтореного припущення можна формулювати і словами:

> **Правило вилучення повтореного припущення.** Від вивідної послідовності, в якій певне припущення повторене двічі, можна перейти до вивідної послідовності, в якій припущення записане лише один раз.

Друга схема правил відмічає несуттєвість порядку, в якому записані припущення.

Приклад 2.6 *Нехай припущення a — "зараз літо" і припущення b — "зараз не літо" — суперечливі, що символічно можна записати так :*

$$a, b \vdash \tag{11}$$

Тоді суперечливими будуть також припущення: b — "зараз не літо" і a — "зараз літо", що у вигляді вивідної послідовності запишеться так:

$$b, a \vdash \tag{12}$$

Перехід від вивідної послідовності (11) до вивідної послідовності (12) запишеться у вигляді правила

$$\frac{a, b \vdash}{b, a \vdash} \tag{13}$$

Ми інколи за допомогою порядку речень відмічаємо, яка подія відбулася раніше, а яка — пізніше. Цю рису приватного спілкування підкреслює латинський вислів: "Post hoc, ergo propter hoc" — "Після цього, значить внаслідок цього". В науковому чи публіцистичному спілкуванні таке використання порядку речень є помилкою міркування.

Приклад 2.7 *В тексті: "Прийшла весна. Стало весело на душі" неявно сповіщаєтьса, що подія "Прийшла весна" відбулася раніше ніж друга подія — "Стало весело на душі", причому перша подія спричинила другу.*

Логіка висловлень записами час не передає . Тому позначивши

a — "Прийшла весна";

b — "Стало весело на душі";

c — "Я ще живий",

ми одержимо одночасно інтуїтивно правильні, або одночасно хибні вивідні послідовності

$$a, b \vdash c \tag{14}$$

та

$$b, a \vdash c \tag{15}$$

Перехід від (14) до (15) записуються у вигляді правила

$$\frac{a, b \vdash c}{b, a \vdash c} \tag{16}$$

В загальному випадку вивідна послідовність може мати довільну скінченну сукупність припущень. Тому в символічному вигляді в загальному випадку схема правил, що розглядаються (схема правил довільності порядку припущень), записується у вигляді

$$\frac{a_1, a_2, ..., a_n, a, b, b_1, b_2, ..., b_n \vdash c}{a_1, a_2, ..., a_n, b, a, b_1, b_2, ..., b_n \vdash c} \tag{17}$$

Вважається, що (13) і (16) — це окремі випадки (17).

Приклад 2.8 *Конкретними випадками схеми правил (17) будуть правила*

$$\frac{p, q, r \vdash a}{p, r, q \vdash a}, \qquad \frac{p, q, r \vdash a}{a, p, r \vdash a}$$

та правила

$$\frac{p, q, r \vdash}{p, r, q \vdash}, \quad \frac{p, q, r \vdash}{a, p, r \vdash}, \quad \frac{p \to q, a \wedge b \vdash c}{a \wedge b, p \to q \vdash c}.$$

Тут і нижче замість слів “конкретний випадок схеми правил доведення“ будемо також вживати словосполуку “правило доведення“.

В (17) сказано, що міняти місцями можна лише два сусідні припущення. Оскільки міняючи місцями два сусідні припущення ми можемо досягти будь-якого порядку запису припущень, то словами правило довільності порядку припущень формулюється так:

> **Правило довільності порядку припущень.** Від вивідної послідовності можна перейти до іншої вивідної послідовності, яка має ті ж самі припущення, що і перша, але вони записані в будь-якому порядку, і той же самий висновок.

Приклад 2.9 *Прикладами правила довільності порядку припущень будуть*

$$\frac{a, b, c, d, l \vdash p}{c, l, a, d, b \vdash p}, \quad \frac{a, b, c \vdash}{c, a, b \vdash},$$

та

$$\frac{p \wedge r, \neg(a \vee b), p \Rightarrow a \vdash p \wedge a}{\neg(a \vee b), p \Rightarrow a, p \wedge r \vdash p \wedge a}.$$

Останнє, третє правило перетворень припущень, що називається правилом добавляння зайвого припущення, формулюється так:

> **Правило добавляння зайвого припущення.** Якщо з меншої кількості припущень можна зробити якийсь висновок, то з більшої кількості припущень тим більше можна зробити той же висновок.

Проілюструємо сказане. Нехай наступне міркування

$$a, b \vdash c \tag{18}$$

є правильним, де

a — “добуток $240 \cdot 665$ ділиться на 19“;

b — “число 240 є взаємно простим із числом 19“;

c — “число 665 ділиться на 19“.

Словами наведене міркування читається так: “Припустимо, що добуток $240 \cdot 361$ ділиться на 19, а число 240 є взаємно простим із числом 240. Тоді можна вважати доведеним, що число 665 ділиться на 19.“

Тоді правильним буде також міркування

$$a, b, d \vdash c, \tag{19}$$

де a, b, c означають ті ж висловлення, що і в попередньому випадку, а d означає висловлення “число 240 ділиться на 5“. Словами міркування (19) передається так:

> “Припустимо, що добуток $240 \cdot 361$ ділиться на 19, а число 240 є взаємно простим із числом 240. Припустимо також, що нам відомо, що число 240 ділиться на 5. Тоді можна вважати доведеним, що число 665 ділиться на 19.“

Символічно перехід від вивідної послідовності (18) до вивідної послідовності (19) запишеться у вигляді правила

$$\frac{a, b \vdash c}{a, b, d \vdash c}.$$

В реальній ситуації для більшої переконливості підсилюють достатню аргументацію. Так в припущенні, що йде дощ, можна зробити висновок, що потрібно взяти парасольку. Але висновок буде переконливішим, коли маємо ще одне припущення — дощ буде іти і далі.

В загальному випадку схема правил добавляння зайвого припущення записується у вигляді

$$\frac{a_1, a_2, ..., a_n \vdash b}{a_1, a_2, ..., a_n, a \vdash b} \tag{20}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, a, b$ — це формули логіки висловлень.

Приклад 2.10 *Вважається, що окремими випадками схеми правил добавляння зайвого припущення (тобто уже правилами добавляння зайвого припущення) є наступні*

$$\frac{a, b \vdash}{a, b, c \vdash}, \quad \frac{\vdash a}{b \vdash a}, \quad \frac{a \wedge b, c \vdash e \Rightarrow a}{a \wedge b, c, d \wedge e \vdash e \Rightarrow a}.$$

Ми в правилі (20) добавляємо зайве припущення справа. Але комбінуючи правило добавляння зайвого припущення із правилом довільності порядку припущень ми можемо одержати правило, за яким добавляти зайве припущення можна в будь якому місці серед тих припущень, що уже були доведені, тобто окремими випадками схеми правил (правилами) добавляння зайвого припущення будуть

$$\frac{a \wedge b, c \vdash a \wedge b \wedge c}{a \wedge b, d, c \vdash a \wedge b \wedge c},$$

та

$$\frac{a \Rightarrow b, p \wedge q, r \vee \neg a \vdash}{a \Rightarrow b, b \Rightarrow a, p \wedge q, r \vee \neg a \vdash}.$$

2.5 Правила доведення, що стосуються імплікації

Перше правило, що стосується імплікації $\Rightarrow$ — правило введення логічного сполучника "якщо ..., то ...", підкреслює, що розуміння знака $\vdash$ дуже близьке до розуміння знака $\Rightarrow$.

Наведемо приклад. Нехай в припущенні, що система рівгянь має два різні розв'язки, можна довести, що истема має нескнченно багато розв'язків. Символічно сказане запишеться так

$$a \vdash \; b, \tag{21}$$

де

a — "система має два різні розв'язки",

b — "система має нескінченно багато розв'язків".

Тоді можна довести правильність висловлення "якщо система має два різні розв'язки, то система має нескінченно багато розв'язків". Останнє символічно у вигляді вивідної послідовності запишеться так :

$$\vdash \; a \Rightarrow \; b. \tag{22}$$

Перехід від вивідної послідовності (21) до вивідної послідовності (22) записується у вигляді правила

$$\frac{a \vdash \; b}{\vdash \; a \Rightarrow \; b}.$$

Це і є конкретний випадок правила введення сполучника $\Rightarrow$.

Ще один приклад. Уявимо собі, що ми згодні з вивідною послідовністю

$$a, b \vdash \; c, \tag{23}$$

де

a — "заданий многочлен має степінь 2, тобто є квадратним тричленом";

b — “всі корені заданого многочлена від’ємні“;

c — “вільний член заданого многочлена додатний“.

Словами вивідна послідовність (23) прочитається так: “Припустивши, що заданий многочлен має степінь 2, тобто є квадратним тричленом, і припустивши, що всі корені заданого многочлена від’ємні, можна довести, що вільний член заданого многочлена додатний“. Тоді у нас не викличе сумніву правильність міркування: “ Припустивши, що заданий многочлен має степінь 2, можна довести, що із того, що всі корені заданого многочлена від’ємні, випливає , що вільний член заданого многочлена додатний“. У вигляді вивідної послідовності сказане запишеться так:

$$a \vdash \; b \Rightarrow \; c. \tag{24}$$

Перехід від послідовності (23) до вивідної послідовності (24) запишеться так:

$$\frac{a, b \vdash \; c}{a \vdash \; b \Rightarrow \; c}.$$

Це також конкретний приклад правила введення сполучника $\Rightarrow$.

Головна різниця між знаками $\vdash$ та $\Rightarrow$ полягає в місці їх використання: $\Rightarrow$ ми використовуємо при записі формул, а знак $\vdash$ використовується при дослідженні уже створених формул. Можна навести подібний приклад із побуту: шафа, використана для зберігання білизни, називається комодом, а шафа, використана для зберігання посуду, називається сервант. Гарна господиня побачить багато різного у комода і у серванта. Подібним чином логік вкаже більшу різницю між знаками $\vdash$ та $\Rightarrow$, ніж відмічено на сторінці.

Правило введення $\Rightarrow$ В загальному випадку схема правил введення сполучника $\Rightarrow$ записується так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n, A \vdash \; B}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash \; A \Rightarrow \; B},$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, A, B$ — деякі формули. Зокрема правилом введення сполучника $\Rightarrow$ вважається

$$\frac{A \vdash\ B}{\vdash\ A \Rightarrow\ B},$$

де A, B — деякі формули.

Правило доведення одержуємо, коли в схему правил замість позначень для формул підставляємо конкретні формули. Правилами введення сполучника $\Rightarrow$ будуть

$$\frac{p \wedge q \vdash\ p}{\vdash\ p \wedge q \Rightarrow\ p}, \frac{p, q, p \vee r \vdash\ q \wedge r}{p, q \vdash\ q \vee r \Rightarrow\ q \wedge r}.$$

Друге правило, що стосується сполучника $\Rightarrow$, називається правилом відділення засновку, або модус поненс. Дослівно модус поненс (латинською мовою пишеться modus ponens) перекладається як правило відділення. Латинську назву вживають, щоб підкреслити особливу важливість цього правила в логіці, а також віддаючи данину традиції. Проілюструємо його.

Означимо

a — "два задані натуральні числа n, m взаємно прості, тобто маєють єдиний спільний дільник — 1"

b — "для заданих натуральних чисел n, m можна підібрати цілі числа x, y так, щоб виконувалася рівність $xn + ym = 1$."

Нехай можна довести, що два задані натуральні числа n, m взаємно прості, тобто маєють єдиний спільний дільник — 1 (висловлення a), і можна довести, що коли два задані натуральні числа n, m взаємно прості, то існують цілі числа x, y такі, що виконуєься рівність $xn + ym = 1$. (висловлення $a \Rightarrow\ b$), тобто в символьному вигляді ми можемо написати

$$\vdash\ a, \vdash\ a \Rightarrow\ b, \tag{25}$$

Тоді можна вважати доведеним, що для заданих натуральних чисел n, m можна підібрати цілі числа x, y так, щоб виконувалася рівність $xn + ym = 1$ (висловлення b), тобто в символьному вигляді ми можемо записати

$$\vdash\ b. \tag{26}$$

Перехід від (25) до (26) запишеться у вигляді правила

$$\frac{\vdash\ a, \quad \vdash\ a \Rightarrow\ b}{\vdash\ b}.$$

Це і є конкретний випадок правила modus ponens.

Приклад 2.11 *Припустимо, що нам потрібно довести твердження a:*

a — "Трикутник зі сторонами 3,4,5 прямокутний".

Вводимо висловлення b — $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Прямим обчисленням доводимо b. Потім доводимо $b \Rightarrow\ a$, і вважаємо, що висловлення a доведене.

Правило modus ponens. В загальному випадку правила відділення засновку пишуться так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n, A \vdash\ A, \qquad A_1, A_2, ..., A_n \vdash\ A \Rightarrow B}{A_1, A_2, ..., A_n, A \vdash B},$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, A, B$ — деякі формули. Зокрема, правилами відділення засновку вважаються також

$$\frac{\vdash A, \vdash\ A \Rightarrow B}{\vdash B}$$

де A, B — деякі формули логіки висловлень.

Правилами модус поненс будуть

$$\frac{p \wedge q \vdash p, p \wedge q \vdash p \Rightarrow r}{p \wedge q \vdash r}, \qquad \frac{\vdash a \wedge b, \vdash a \wedge b \Rightarrow r}{\vdash r}.$$

2.6 Правила доведення, що стосуються сполучників $\wedge$ та $\vee$

Ми так розуміємо сполучник "і", що для доведення формули $A \wedge B$, де A, B — деякі формули, потрібно довести A і довести B. В цьому і полягає правило введення сполучника "і".

Приклад 2.12 *Позначимо*

a — "десятковий запис деякого заданого натурального числа закінчується на 0";

b — "задане число парне";

c — "задане число ділиться на 5".

Нехай, припускаючи a, ми можемо довести b, і припускаючи a ми можемо довести c, тобто нехай

$$a \vdash b, \qquad a \vdash c \tag{27}$$

Тоді ми можемо, припускаючи, що десятковий запис числа закінчується на 0, довести, що задане число парне і воно ділиться на 5. В символьному вигляді сказане запишеться так:

$$a \vdash b \wedge c. \tag{28}$$

Перехід від (27) до (28) записуємо у вигляді правила:

$$\frac{a \vdash b, a \vdash c}{a \vdash b \wedge c}.$$

Це і є конкретний приклад правила введення логічного сполучника $\wedge$.

Правило введення $\wedge$. В загальному випадку схема правил введення "і" записується так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A, \quad A_1, A_2, ..., A_n \vdash B}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A \wedge B}$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, A, B$ — деякі формули.

Приклад 2.13 *Правилами введення логічного сполучника "і" (нагадуємо, що "і", "та" в логіці висловлень — один і той же сполучник, що позначається знаком $\wedge$) будуть такі:*

$$\frac{a \Rightarrow q \vdash q \vee a; \quad a \Rightarrow q \vdash a \vee q}{a \Rightarrow q \vdash (q \vee a) \wedge (a \vee q)},$$

$$\frac{\neg(\neg a \vee \neg b) \vdash a, \quad \neg(\neg a \vee \neg b) \vdash b}{\neg(\neg a \vee \neg b) \vdash a \wedge b}.$$

Два правила (ліве та праве) використання сполучника $\wedge$ також роз'яснюють наше розуміння сполучника $\wedge$. Ліве правило дозволяє вважати доведеною формулу A ,коли доведена формула $A \wedge B$, а праве правило введення сполучника $\wedge$ дозволяє вважати доведеною формулу B, коли доведена формула $A \wedge B$.

Приклад 2.14 *коли доведено, що число 3978 ділиться на 2 і ділиться на 9 , то можна вважати доведеним, що число 3978 ділиться на 2 , і можна вважати доведеним, що число 3978 ділиться на 9.*

Правило лівого використання $\wedge$ В загальному випадку схема правил лівого використання $\wedge$ записується так:

$$\frac{A_1, A_2..., A_n \vdash A \wedge B}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A},$$

Правило правого використання $\wedge$ В загальному випадку схема правил правого використання $\wedge$ записується так:

$$\frac{A_1, A_2..., A_n \vdash A \wedge B}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash B},$$

В наведених вище схемах правил $A_1, A_2, ..., A_n, A, B$ означають деякі формули. Підставляючи замість $A_1, A_2, ..., A_n, A, B$ в правило конкретні формули, ми будемо одержувати конкретні правила використання сполучника $\wedge$.

Приклад 2.15 *Прикладом лівого правила використання $\wedge$ буде*

$$\frac{p \Rightarrow q, r \vdash (a \vee b) \wedge (b \vee c)}{p \Rightarrow q, r \vdash a \vee b}.$$

Прикладом правого правила використання сполучника $\wedge$ буде

$$\frac{p \Rightarrow q, r \vdash (a \vee b) \wedge (b \vee c)}{a \Rightarrow q, r \vdash b \vee c}.$$

Для сполучника $\vee$ є два (ліве та праве) правила введення сполучника $\vee$, і одне правило використання.

Припустимо, що ми можемо довести висловлення a, тобто ми можемо записати

$$\vdash a \tag{29}$$

Тоді ми можемо написати

$$\vdash b \vee a, \tag{30}$$

І можемо написати

$$\vdash a \vee b. \tag{31}$$

Перехід від (29) до (30) запишеться у вигляді правила

$$\frac{\vdash a}{\vdash b \vee a}. \tag{32}$$

А перехід від (29) до (31) запишеться у вигляді правила

$$\frac{\vdash a}{\vdash a \vee b}. \tag{33}$$

Правила (32) та (33) є приклади відповідно лівого та правого правил введення сполучника “або“.

Правило лівого введення сполучника $\vee$. В загальному випадку схема правил лівого введення сполучника $\vee$ записується так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash B \vee A}.$$

Правило правого введення сполучника $\vee$. Схема правил правого введення сполучника $\vee$ записується так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A \vee B}.$$

Приклад 2.16 *Правил лівого введення сполучника $\vee$ буде*

$$\frac{p \wedge q \vdash p}{p \wedge q \vdash q \vee p}.$$

Правилом правого введення сполучника $\vee$ буде

$$\frac{p \wedge q \vdash p}{p \wedge q \vdash p \vee q}.$$

Наступне правило показує, як використовувати доведену формулу $a \vee b$. Спочатку наведемо приклад. Позначимо

a — "В даний момент часу температура повітря нижча -40^o."

b — "В даний момент часу температура повітря вища $+40^o$."

c — "В даний момент часу повітрям важко дихати"

Припустимо, що коли температура повітря нижча -40^o, то можна довести, що в даний момент часу повітрям важко дихати. Припустимо, що коли температура повітря вища, ніж $+40^o$, то можна довести, що повітрям важко дихати. Припустимо також, що можна довести, що в даний момент часу температура повітря або вища, ніж $+40^o$, або нижча, ніж -40^o. Сказане символьно запишеться у вигляді трьох вивідних послідовностей

$$a \vdash c, \quad b \vdash c, \quad \vdash a \vee b, \tag{34}$$

правильність яких ми припускаємо. Тоді ми можемо вважати доведеним, що в даний момент часу повітрям важко дихати, тобто можна записати

$$\vdash c \tag{35}$$

Перехід від (33) до (34) запишеться так:

$$\frac{a \vdash c, b \vdash c, \vdash a \vee b}{\vdash c}.$$

Правило використання сполучника $\vee$. Символьно правило використання сполучника $\vee$ записується так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n, A \vdash C, \quad A_1, A_2, ..., A_n, B \vdash C, \quad A_1, A_2, ..., A_n \vdash A \vee B}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash C},$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, A, B, C$ — деякі формули.

2.7 Правила доведення, що стосуються частки "не" та суперечностей.

Перше правило — правило приведення до суперечності роз'яснює, як ми розуміємо суперечність. А розуміємо так: ми маємо суперечність у випадку, коли доведене і якесь висловлення, і його заперечення. Точне формулювання правила приведення до суперечності наступне:

> **Правило приведення до суперечності.** Якщо із сукупності припущень можна довести висловлення і можна довести заперечення цього висловлювання, то така сукупність припущень суперечлива.

Символами правило приведення до суперчності записується так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A; \qquad A_1, A_2, ..., A_n \vdash \neg A}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash},$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, A$ — деякі формули.

Приклад 2.17 *Правилами приведення до суперечності є:*

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge b \wedge \neg(p \Rightarrow q) \vdash p \Rightarrow q; \quad (p \Rightarrow q) \wedge b \wedge \neg(p \Rightarrow q) \vdash \neg(p \Rightarrow q)}{(p \Rightarrow q) \wedge b \wedge \neg(p \Rightarrow q) \vdash},$$

$$\frac{a \Rightarrow b \vee c \vdash a \Rightarrow b \Rightarrow c; \quad a \Rightarrow b \vee c \vdash \neg(a \Rightarrow b \Rightarrow c)}{a \Rightarrow b \vee c \vdash},$$

$$\frac{p, q, \neg p \vdash p; p, q, \neg p \vdash \neg p}{p, q, \neg p \vdash}.$$

Наведене правило часто використовується як складова частина доведення від протилежного, або зведенням до абсурду, до безглуздя. Відповідна латинська назва прийому доведення — reductio ad absurdum. Доведення від протилежного закінчується словами: "Одержана суперечність доводить неможливість припущення".

Наступне правило — правило неінформативності суперечності, формулються наступним чином.

Правило неінформативності суперечності. Із суперечливої сукупності припущень можна довести все що завгодно. Символьно воно формулюється так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n \vdash}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A},$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, A$ — деякі формули.

У наступних двох правилах — правилі введення $\neg$ та правилі використання $\neg$, схований закон виключеного третього.

Приклад 2.18 *Припустивши, що прості числа вичерпуються скінченною сукупністю, і прийшовши до суперечності ми стверджуємо, що прості числа не вичерпуються скінченою сукупністю. Також припустивши, що число 5 є квадрат деякого раціонального числа, і одержавши суперечність, ми стверджухмо, що 5 не є квадрат раціонального числа.*

Правило введення $\neg$ В загальному випадку схема правил введення $\neg$ записухться так:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n, A \vdash}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash \neg A},$$

причому окремим випадком цього правила вважається (при $n = 0$)

$$\frac{A \vdash}{\vdash \neg A}.$$

Правила використання $\neg$ записуються наступним чином.

Правило використання $\neg$:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n, \neg A \vdash}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash A},$$

причому окремим випадком (при $n = 0$) цього правила є:

$$\frac{\neg A \vdash}{\vdash A},$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, A$ — деякі формули.

Словами правило введення $\neg$ формулюється так:

Коли добавивши висловлення до сукупності припущень ми можемо одержати суперечність, то із початкової сукупності припущень можна довести заперечення висловлення.

Правило використання $\neg$ формулюється так:

Коли добавивши заперечення висловлення до заданої сукупності припущень ми можемо прийти до суперечності, тоді із початкової сукупності припущень можна довести саме висловлення.

2.8 Доведення вивідних послідовностей та формул.

Звичайно, при доведенні висловлеань ми повинні користуватися бездоганними початковими твердженнями, а такими для нас є аксіоми, та переходити від одних тверджень до інших за допомогою чітко сформульованих правил доведення.

Спочатку наведемо приклад доведення вивідної послідовності, а потім дамо оначення. Нехай нам потрібно довести вивідну послідовність

$$p, q \vdash p \wedge q. \tag{36}$$

Робимо це по кроках. Спочатку напишемо аксіоми

$$p \vdash p, \tag{37}$$

$$q \vdash q, \tag{38}$$

І підкреслимо, що будь-яке формальне доведення починається із аксіоми. Далі застосуємо правило добавляння зайвого припущення до вивідних послідовностей (37) та (38), добавивши q до припущень в (37), та q до припущень в (38). Застосувати правило до вивідних послідовностей означає записати знаменник цього правила у випадку, коли чисельник складають задані вивідні послідовності. Таким чином ми одержимо вивідні послідовності

$$p, q \vdash p, \tag{39}$$

$$q, p \vdash q, \tag{40}$$

Далі застосуємо правило довільності порядку припущень до (40), або, простіше, переставимо припущення в (40) і одержимо

$$p, q \vdash q, \tag{41}$$

На наступному кроці запишемо правило введення $\wedge$, в чисельнику якого стоять(39) та (41):

$$\frac{p, q \vdash p;\ \ p, q \vdash q}{p, q \vdash p \wedge q}.$$

Таким чином застосування правила введення $\wedge$ до вивідних послідовностей (39) та (41) дає нам потрібну вивідну послідовність (36).

Ми бачимо, що в доведенні кожна наступна послідовність одержується із попередніх за допомогою одного із правил доведення, тобто в доведенні ми можемо написати чергову вивідну послідовність, коли вона є знаменником певного правила доведення, причому чисельник у цього правила доведення складають раніше одержані вивідні послідовності.

> *Доведення вивідної послідовності* це ланцюжок вивідних послідовностей, причому
>
> - перша вивідна послідовність в ланцюжку — це аксіома,
> - кожна наступна вивідна послідовність або є аксіомою, або одержується із попередніх за допомогою одного із правил доведення.
> - остання вивідна послідовність в ланцюжку — та, яку потрібно довести.
>
> Під доведенням формули A розуміють доведення вивідної послідовності
>
> $$\vdash A.$$

Приклад 2.19 *Для доведення формули $a \Rightarrow a$, тобто для доведення вивідної послідовності $\vdash a \Rightarrow a$, потрібно записати аксіому*

$$a \vdash a,$$

потім застосувати для цієї аксіоми правило введення $\Rightarrow$, тобто правило

$$\frac{a \vdash a}{\vdash a \Rightarrow a}.$$

Записи $a \vdash a$, $\vdash a \Rightarrow a$ *утворюють доведення послідовності* $\vdash a \Rightarrow a$ *і, отже, ці записи утворюють доведення формули* $a \Rightarrow a$.

Приклад 2.20 *Застосувавши правило введення* $\Rightarrow$ *до вивідної послідовності (36), ми одержимо*

$$p \vdash q \Rightarrow p \wedge q. \tag{42}$$

Знову застосувавши правило введення $\Rightarrow$ *до (42), одержимо*

$$\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q). \tag{43}$$

Таким чином черга вивідних послідовностей (37),(38),(39), (40),(41),(36),(42),(43) складає доведення формули

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q).$$

Приклад 2.21 *Доведемо формулу* $a \vee \neg a$. *Довести ю формулу означає, що потрібно довести вивідну послідовність* $\vdash a \vee \neg a$. *Для цього запишемо аксіоми*

$$\neg a \vdash \neg a, \tag{44}$$

$$\neg(a \vee \neg a) \vdash \neg(a \vee \neg a). \tag{45}$$

Потім запишемо вивідні послідовності

$$\neg a \vdash a \vee \neg a, \tag{46}$$

$$\neg a, \neg(a \vee \neg a) \vdash a \vee \neg a, \tag{47}$$

$$\neg(a \vee \neg a), \neg a \vdash a \vee \neg a, \tag{48}$$

$$\neg(a \vee \neg a), \neg a \vdash \neg(a \vee \neg a), \tag{49}$$

$$\neg(a \vee \neg a), \neg a \vdash, \tag{50}$$

$$\neg(a \vee \neg a) \vdash a, \tag{51}$$

$$\neg(a \vee \neg a) \vdash a \vee \neg a, \tag{52}$$

$$\neg(a \vee \neg a) \vdash, \tag{53}$$

$$\vdash a \vee \neg a, \tag{54}$$

$$\tag{55}$$

Послідовність (46) одержується із (44) за допомогою правила лівого введення "або", тобто записуємо правило лівого введення "або"

$$\frac{\neg a \vdash \neg a}{\neg a \vdash a \vee \neg a},$$

і, оскільки чисельник у нас уже в послідовності вивідних послідовностей(секвенцій) уже виписаний, то ми маємо право (і користуємос ним) виписати секвенцію, що стоїть у знаменнику, тобто записати (46). (47) одержується із (46) добавлянням зайвого припущення; (48) одержується із (47) переставлянням припущень; (49) одержується із (45) добавлянням зайвого припущення; (50) одержується із (48) та (49) за правилом одержання суперечності; (51) одержується із (50) за допомогою правила використання "не"; (52) одержується із (51) за допомогою правила введення "або"; (53) одержується із (45) та (52) за правилом одержання суперечності; (54) одержується із (53) за правилом використання "не".

Таким чином, одинадцять вивідних послідовностей (44) — (54) складають доведення формули $a \vee \neg a$. Вивідні послідовності (44) — (50) складають доведення вивідної послідовності (50).

Теорема 2.1 (Теорема повноти для численя секвенцій) *Формулу логіки висловлень можна довести тоді і тільки тоді, коли ця формула істинна при будь-якій інтерпретації*

Система аксіом і система правил доведення (тобто числення) як для логіки висловлень так і для інших логік не є догмою, ці набри не єдино можливі. Для одного із числень теорему повноти довів Еміль Пост в 1921 році.

Доведення. Традиція викладання логіки висловлень не передбачає доведення цієї теореми, тому що воно громіздке. В підручниках це доведення не знайдеш. Підтримаємо цю традицію і ми, доведення давати не будемо.

В 2001 році в рамках Малої академії наук довести цю теорему було запропоновано ученику 11 класу Харківької СШ № 54 Водяхо Кості. Завдання Костя успішно виконав і успішно захистив роботу. Його доведення містить 14 сторінок.

Наведемо кілька доведень із роботи К.Ю.Водяхо.

Доведенням вивідної послідовності $\neg\neg a \vdash a$ є

$$\neg\neg a \vdash \neg\neg a, \quad \neg a \vdash \neg a,$$

$$\neg\neg a, \neg a \vdash \neg\neg a, \quad \neg\neg a, \neg a, \vdash \neg a,$$

$$\neg\neg a, \neg a, \vdash, \quad \neg\neg a \vdash a.$$

Доведенням вивідної послідовності $a \vdash \neg\neg a$ є

$$a \vdash a, \quad \neg a \vdash \neg a, \quad a, \neg a \vdash a, \quad a, \neg a, \vdash \neg a, \quad a, \neg a, \vdash, \quad a \vdash \neg\neg a.$$

Доведенням вивідної послідовності $a \wedge a \vdash a$ є

$$a \wedge a \vdash a \wedge a, \quad a \wedge a \vdash a.$$

Доведенням вивідної послідовності $a \wedge b \vdash b \wedge a$ є

$$a \wedge b \vdash a \wedge b, \quad a \wedge a \vdash a.$$

Доведенням вивідної послідовності $a \vee b \vdash b \vee a$ є

$$a \vdash a. \quad a \vdash b \vee a, \quad b \vdash b \vee a, \quad b \vdash b \vee a,$$

$$a \vee b, a \vdash b \vee a, \quad a \vee b, b \vdash b \vee a,$$

$$a \vee b \vdash a \vee b, \quad a \vee b \vdash b \vee a.$$

Доведенням вивідної послідовності $\neg(a \wedge b) \vdash \neg a \vee \neg b$ є

$$\neg(\neg a \vee \neg b) \vdash \neg(\neg a \vee \neg b),$$

$$\neg(a \wedge b) \vdash \neg(a \wedge b),$$

$$\neg a \vdash \neg a, \quad \neg b \vdash \neg b, \quad a \wedge b \vdash a \wedge b,$$

$$\neg a \vee \neg b \vdash \neg a \vee \neg b,$$

$$\neg a \vdash \neg a \vee \neg b, \quad \neg b \vdash \neg a \vee \neg b,$$
$$\neg(\neg a \vee \neg b), \neg a \vdash \neg a \vee \neg b,$$
$$\neg(\neg a \vee \neg b), \neg a \vdash \neg(\neg a \vee \neg b),$$
$$\neg(\neg a \vee \neg b), \neg a \vdash, \quad \neg(\neg a \vee \neg b) \vdash a,$$

$$\neg(\neg a \vee \neg b), \neg b \vdash \neg a \vee \neg b,$$
$$\neg(\neg a \vee \neg b), \neg b \vdash \neg(\neg a \vee \neg b),$$
$$\neg(\neg a \vee \neg b), \neg b \vdash, \quad \neg(\neg a \vee \neg b) \vdash b$$

$$\neg(\neg a \vee \neg b) \vdash a \wedge b,$$
$$\neg(a \wedge b), \neg(\neg a \vee \neg b) \vdash a \wedge b, \quad \neg(a \wedge b),$$
$$\neg(\neg a \vee \neg b) \vdash \neg(a \wedge b), \quad \neg(a \wedge b), \neg(\neg a \vee \neg b) \vdash,$$

$$\neg(a \wedge b) \vdash \neg a \vee \neg b.$$

■

Теорема 2.2 (Теорема несуперечності числення секвенцій) *Не існує такої формули A, щоб і A і $\neg A$ мали доведення.*

Доведення.Доведення теореми грунтується на тому, що довести можна лише формулу, яка є істинною за будь-якої інтерпретації. Деталізації уникнемо.

■

3 Числення висловлень

Числення висловлень відрізняється від числення секвенцій тим, що в ньому не використовується знак $\vdash$. В численні вислювлень і аксіоми і правила доведення є формулами. На численні секвенцій ми зупинилися досить розлого з огляду на те, що цей матеріал не дублюється іншими математичнии дисциплінами, на відміну, скажемо, від булевих функцій, таблиць істиності, відношенень, операцій, відображень та подібного. Крім того, в логіці цей матеріал вважається занадто легким, щоб на ньому варто було зупинятися. Відповідно, наукова література відводить цьому матераілу дуже мало місця.[3]

3.1 Схеми аксіом числення висловлювань

Числення висловлюань має 11 схем аксіом

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
3. $(A \wedge B) \Rightarrow A$;
4. $(A \wedge B) \Rightarrow B$;
5. $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$;
6. $A \Rightarrow (A \vee B)$;
7. $B \Rightarrow (A \vee B)$;
8. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$;
9. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$;
10. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$;

[3] Російською мовою відповідний матеріал можна знайти в збірнику: Лавров И.А. Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М:Наука, 1984 §3, стор. 59

11. $A \vee \neg A$;

3.2 Схема правил доведення в численні висловлень

Схема правил доведення одна — MP (modus ponens)

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B}.$$

3.3 Доведення в численні висловлень

Визначення 3.1 *Доведенням в ЧВ (численні висловлень) називають послідовність формул, кожна з який або є аксіомою, або одержується із попередніх за допомогою MP.*

Зауважимо, що загальновизнаним по значенням $\Rightarrow$ для імплікації стало зовсім недавно. Отже література з логіки використовує для імплікації і інші позначення — $\rightarrow$ та $supset$.

Приклад 3.1 *Пояснимо сказане прикладом доведення формули* $(A \supset A)$.

В цьому записі із мовного оточення визначається, що A є формулою числення висловлень.

Доведенням є послідовність:

1. $(A \supset (A \supset A))$ —аксіома 1.
2. $((A \supset (A \supset A)) \supset ((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A)))$. — аксіома 2.
3. $((A \supset ((A \supset A)) \supset A) \supset (A \supset A))$ — modus ponens.
4. $(A \supset ((A \supset A)) \supset A)$; —аксіома 1.
5. $(A \supset A)$ — modus ponens.

Підставивши в схему аксіом 1 замість букви B та букви A формулу A, одержуємо вже аксіому $(A \supset (A \supset A))$, яка ставиться першою в доведенні потрібної формул.

Подібним чином, підставивши в схему аксіом 2 замість всіх букв формулу A одержуємо аксіому

$$((A \supset (A \supset A)) \supset ((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A))).$$

Ця аксіома є імплікацією — із $(A \supset (A \supset A))$ ввипливає $((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A))$. Припущення в цій імплікації вже є в нашому доведенні під номером 1. Тому можна застосувати правило відділення засновку (modus ponens) і одержати третій елемент доведення:

$$((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A))$$

Ця третя формула знову є імплікацією, засновком якої є формула $(A \supset ((A \supset A) \supset A))$. Ця формула є аксіомою — її можна одержати із першої схемы аксіом заміною B на $A \supset A$. Ця аксіома є четвертим елементом в доведенні.

Тепер до третьої формули можна застосуати правило відділення засновку — засновок уже доведений. Таким чином, п'ятий элемент в доведенні є потрібна формула. Доведення закінчене.

Наведемо приклад доведення з використанням позалогічних аксіом і з використанням позначення $\to$ для імплікації. Нехай нам відомі позалогічні аксіоми $p, \neg q$, і потрібно довести $\neg(p \to q)$.

1. p — за умовою.

2. $p \to ((p \to q) \to p)$ – аксіома 1.

3. $(p \to q) \to p$ — MP до 2.

4. $(p \to q) \to (p \to q)$ — переписана формула із попереднього прикладу. Отже тут пропущена частина доведення. Доведені формули називають теоремами.

5. $((p \to q) \to (p \to q)) \to (((p \to q) \to p) \to ((p \to q) \to q)$ — аксіома 2. В ній замість A підставлено $p \to q$, замість B підставлено p і замість C підставлено q.

6. $(p \to q) \to q$ — двічі застосували MP до попередньої формули.

7. $\neg q$ — за умовою.

8. $\neg q \to ((p \to q) \to \neg q)$ — аксіома 1.

9. $(p \to q) \to \neg q$ — застосували MP до попередньої формули.

10. $((p \to q) \to q) \to ((p \to q) \to \neg q) \to \neg(p \to q)$ — аксіома 10, в якій A замінена на $p \to q$, B замінена на q.

11. $\neg(p \to q)$ — доведена формула.

4 Метод резолюцій

Нехай потрібно довести формулу A.

Першим кроком в методі резолюцій є запис (припущення) формули $\neg A$.

Другим кроком є приведення формули $\neg A$ до кон'юнктивної нормальної форми:

$$\neg A = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n,$$

де формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є диз'юнкціями змінних та їх заперечень[4].

[4]Вважаємо, що знайомство з булевими функціями уже відбулося. Відповідно, відбулося знайомство з досконалими диз'юнктивними та кон'юнктивними формами.

Третій крок полягає в припущенні, що всі формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ уже доведені.

Останній крок полягає в доведенні того, що таке припущення приводить до суперечності — отже, використаний метод доведення від п ротилежного. При цьому використовується єдине правило доведення — правило резолюцій

Оскільки весь час працюють із змінними та їх запереченнями, то вводять термін — літерал. Отже

> літерал це пропозиційний символ (пропозиційна змінна) або його заперечення.

Після приведення формули $\neg A$ до кон'нктивної нормальної форми, ми одержуємо формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (ДКНФ є кон'юнкцією цих формул), що є диз'юнкціями змінних та їх заперечень. Для таких формул використовують термін "диз'юнкт". Отже

> диз'юнкт — це формула, яка є диз'юнкцією літералів, тобто змінних (пропоозиційних символів) та їх заперечень.

Двічі повторюваний літерал записують один раз.

Порядок, в якому виписуються диз'юнкти, і порядок, в якому виписуються літерали диз'юнкта, не має значення. Такою "неповагою" до порядку метод резолюцій суттєво відрізняється від методів, що розглянені вище.

Позалогічні аксіоми також є набором диз'юнктів.

Ще одна особливість метода резолюцій — це використання так званого порожнього диз'нкта, який позначається $\Box$, і який означає тотожно хибну формулу.

На останньому четвертому кроці в методі резолюцій потрібно довести диз'юнкт $\Box$ — оце і є кінець доведення формули A.

Єдине правило доведення, яке використовується в методі резолюцій – це правило резолюції. Воно застосовується до двох диз'юнктів, один з яких містить змінну, а другий містить заперечення цієї змінної. Нехай A_1, A_2 — два такі диз'юнкти, тобто для деяких диз'юнктів B_1, B_2 для деякої змінної p можна записати

$$A_1 = p \vee B_1, \qquad A_2 = \neg p \vee B_2.$$

Тоді правило резолюції із формул A_1, A_2 зробити висновок $B_1 \vee B_2$. Символьно, правило резолюції можна записати так

$$\frac{p \vee B_1, \quad \neg p \vee B_2}{B_1 \vee B_2}.$$

Диз'юнкти B_1, B_2, що використовуються в правилі резолюції, можуть бути порожніми. Порожній диз'юнкт взагалі можна дописати до будь-якого диз'юнкта.

Важливість метода резолюцій полягає в тому, що для нього можна створити дієвий комп'ютерний алгоритм. Для використання в логіці висловлень це не так важливо, але після перенесення в логіку предикатів, наявність дієвого алгоритму доведення приводить до появи мов програмування, які використовують такий алгоритм. Це так звані пролог-подібні мови. Пролог — одна з перших мов програмування, яка грунтується на методі резолюцій.

Російською мовою з методу резолюцій можна рекомендувати книгу

Ч.Чень, Р.Ли "Математическая логика и автоматическое доказательство теорем" — М:Наука, 1983 Книга є в інтернеті в електронному вигляді в форматі djvu.

5 Синтаксис логіки предикатів

5.1 Алфавіт, терми і формули логіки першого порядку — теорії предикатів.

Алфавіт теорії предикатів містить символи

- для позначення логічних зв'язок, кванторів та логічних констант (сталих);
- для позначення предметних змінних та предметних констант;
- предикатів заданої арності (місності) предикатні символи;

- функціональні символи (заданої арності);
- допоміжні символи;
- металогічні символи — символи, які не використовуються для побудови виразів чи формул.

Звичайно алфавіт також містить

- особливий 2-місний предикатний символ $=$. Логіки, які його використовують, називаються логіками з рівністю.

Логічні зв'язки $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, логічні константи 0, 1 введені вище. При інтепретаціях вони означають певні сполучники природної мови, а 0 та 1 означають оцінку відповідності сказаного до дійсності. Логіних констант може бути досить багато — наприклад, можна позначати оцінки "невідомо", "практично так", "можливо, що так", "вельми ймовірно, що так", "обов'язково так" та подібне. Логіки з різними набрами логічних констант мають різні назви — двозначна, модальна, деонтична, ... Ми торкаємося найпростішої, двозначної логіки і логічних сталих дві — 0 та 1.

При інтепретаціях предметних змінних — це змінні і сталі в певній алгебраїчній системі. Щоб підкреслити це, змінні називають предметними змінними. В логіці першого порядку змінних предикатів немає. Вони з'являються в логіці другого порядку. Сталі інтепретуються як конкретні, точно вказані елементи носія алгебраїчної системи.

При інтепретаціях предикатні символи означають конкретні предикати, а функціональні символи означають назви конкретних операцій (в тому числу нульмісних) в певній алгебраїчній системі. Нульмісні предикати інтепретуютсья як логічні константи, а нульмісні функціональні символи як виділені елементи носія.

До допоміжних символів відносимо відкриті та закриті дужки, лапки, крапки та коми, та їм подібне — який символ знадобиться, такий і можна ввести в якості допоміжного символа.

До металогічних символів віднесемо ті символи, які дозволяють записувати можливості всієї теорії. Тут маємо дво основних символи

- $\vdash$ — " в припущенні ... можна довести ...". Використовується в синтаксисі.

- $\models$ — "якщо ... правильне в певній інтепретації, то ... в цій інтерпретації також правильне"

Знак $\vdash$ відноситься до синтаксису, а знак $\models$ відноситься до семантики.

Використавуючи алфавіт будують складні імена для предметних сталих, предикатних та функціональних символів — $x_1, Par, \min, \ldots$. Розкутість мислення дозволяє складні імена також називати чи то предметними, чи то предикатними символами. Звичайно зберігаєтсья обов'язкова умова — ми завжди і безумовно точно можемо розрізнити предметні змінні, предикатні та функціональні символи.

З алфавітом покінчено.

5.2 Вирази (терми) і формули логіки предикатів

Наступне — вирази або терми. Кожна предметна змінна є термом (база індуктивного означення). Якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є $n-$місним термом, і $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — терми (індуктивне припущення), то $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ також є термом (індуктивний перехід). Терм і вираз є синонімами. Можна казати, що $\sin(\cos x + \cos y)$ це вираз, а можна казати, що це терм. Зауважимо — ми дали індуктивне означення.

Далі нам потрібні формули.

Кожен предикатний символ із вказівкою імен предметних змінних, від яких залежить предикатний символ, є формулою (база індуктивного означення). Такі формули називають найпростішими або атомарними. Якщо P тернатний (3-місний, 3-арний) предикатний символ, то $P(x, y, z), P(x_1, x_1, x_2)$ найпростіші формули. Якщо використовуєтсья знак $=$, то з'єднавши два вирази знаком $=$ ми також одержуємо найпростішу (чи атомарну) формулу. Отже $x^2 + x - 2 = 0$ це найпростіша формула. Тут ми маємо базу індуктивного означення.

Якщо ми уже маємо побудовані формули (індуктивне припущення), то з'єднавши їх логіними зв'язками чи навісивши один із кванторів існування чи загальності, одержимо більш складну формулу (індуктивний перехід).

Всі предметні змінні в атомарних формулах називають вільними. Якщо дві формули з'єднали логічною зв'язкою, то вільними змінними одержаної формули будуть вільні змінні складових частин.

Якщо формула A має вільну змінну x, то в формулах

$$\exists x\, A, \qquad \forall x\, A \tag{56}$$

змінну x називають зв'язаною (зв'зана відповідним квантором). Зв'язана змінна не є вільною. Сама формула A в (56) називається областю дії відповідного квантора. Якщо формула не має вільних змінних, то вона називається замкненою.

Операція навішування квантора на формулу A, тобто перехід до формул (56), може призвести до побудови неприємних формул. Так неприємний вигляд має формула $\forall x \exists x(3 < 2)$. Крім того, не викликає сумніву, що формулами $\forall x\, P(x)$і $\forall y\, P(y)$ передаться один і той же зміст. З огляду на це вводять так звану процедуру стандартизації змінних. Згідно цієї процедури формули, які відрізняються лише вменами зв'заних змінних, вважаються рівними. А далі зв'язані змінні перейменовуються так, щоб різні зв'язані змінні мали різні імена.

Використовуючи процедуру стандартизації змінних формулу $\forall x \exists x(3 < 2)$ переписуємо в рівну їй формулу $\forall x \exists y(3 < 2)$. Те, що квантор зв'язує відсутню змінну, прийнятно. Для прикладу, вважається, що нерівність $x + 2 < x + 3$ виконується для будь-якого значенння x.

Приклад 5.1 *Застосувавши процедуру стандартизації до формули*

$$\exists x((x^2 = 1) \vee \forall x \forall x \exists x A(x))$$

одержуємо формулу

$$\exists t((t^2 = 1) \vee \forall z \forall y \exists x A(x)) \tag{57}$$

В формулі (57) областю дії квантора $\exists t$ є формула $(t^2 = 1) \vee \forall z \forall y \exists x A(x)$, областю дії квантора $\forall z$ є формула $\forall y \exists x A(x)$, областю дії квантора $\forall y$ є формула $\exists x A(x)$, областю дії квантора $\exists x$ є формула $A(x)$,

Мова певної логіки, певної теорії складається із алфавіту, виділених імен, термів та формул. Отже ми закінчили окреслення мови двозначної логіки предикатів першого порядку.

6 Інтерпретації (семантика)

Інтерпретація — це вибір конкретної універсальної алгебри чи алгебричної системи із заданим носієм і даною сигнатураю і встановлення взаємно однозначної відповідності між операціями і функціональними символами, між предикатами, що входять до сигнатури універсальної алгебри, та предикатними символами. Після підстановки у формулу замість вільних змінних певних елементів носія формула стає або істинною або хибною. Якщо існує інтепретація і підстановка елементів носія замість вільних змінних така, що формула стає істинною, то цю формулу називають виконуваною. Якщо ж такої інтерперації немає, то формулу називають невиконуваною або тотожно хибною. Коли формула стає істинною при будь-якій інтерпретації і при будь-якій підстановці елементів носія, то таку формулу називають логічно загальнозначущою (скорочено, лзз).

Саму алгебричну систему[5], яка використовується при інтерпретації, називають моделлю. Моделі, які використовуються для інтерпретації логіки предикатів, мають непорожній носій. Тому формула

$$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$$

є загальнозначущою

Запис

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models A$$

розуміємо як повідомлення "кожен раз, коли при інтепретації формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ істинні, формула A також істинна.

Візьмемо приклад — формулу

$$\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(P(y) \land Q(x, y)). \qquad (58)$$

[5]Множина разом з операціями на цій множині називаються універсальною алгеброю. Множина разом з операціями та відношеннями на цій множині називається алгебричною системою. Вважається, що читач уже ознайомлений з відповідним матеріалом

Приклад 6.1 *Візьмемо в якості моделі для інтерпретації множину дійсних чисел. Предикатний символ P означає властивість дійсного числа бути натуральним числом. А Q нехай означає предикат $<$. Тепер формула читається як хибне висловлення — для кожного натурального числа знайдеться менше.*

Приклад 6.2 *Візьмемо в якості моделі для інтерпретації множину дійсних чисел. Предикатний символ P означає властивість дійсного числа бути раціональним число. А Q нехай означає предикат $<$. Тепер формула (58) читається як істинне висловлення — для кожного раціонального числа знайдеться менше раціональне число. Отже формула (58) є виконуваною.*

Множина тотожно істинних формул логіки предикатів є складовою частиною усіх формальних математичних теорій, тому її дослідження і опис є важливою задачею математичної логіки.

6.1 Основні рівносильності

Формули A, B логіки предикатів називаються рівносильними (символьно, $A = B$), коли при будь-якій інтерпретації і при будь-якому підставлянні конкретних значень (елементів носія відповідної алгебричної системи) замість вільних змінних формули мають однакове істиносне значення.

Коли ми дві формули з'єднуємо знаком $=$, то тут знак рівності не є предикатним, а є металогчним. Отже, коли знак $=$ використовується при побудов формули і, відповідно, є предикатним символом, і в той же час дві формули з'єднані знаком $=$, де він є металогічним, то здоровий глузд не дозволить їх переплутати, до непорозумінь таке двоїсте використання знака $=$ не призводить.

Основні рівносильності логіки висловлень наведені на сторінці 5. Якщо в наведених там законах замість пропозиційних символів скрізь підставити предикати (предикатні символи) так, щоб замість одного і того ж пропозиційного симовла стояв один и той же предикат, то одержимо закон логіки предикатів. До того ж нагадаємо, що висловлення також є предикатом, нульмісним.

Випишемо основні рівносильності для формул, що починаються кванторами.

- $\forall x\, \forall y\, A(x,y) = \forall y\, \forall x\, A(x,y)$, $\quad \exists x\, \exists y\, A(x,y) = \exists y\, \exists x\, A(x,y)$, — комутативність однойменних кванторів.

- $\forall x\,(F_1(x)) \wedge \forall x\,(F_2(x)) = \forall x\,(F_1(x) \wedge F_2(x))$, $\quad \exists x\,(F_1(x)) \vee \exists x\,(F_2(x)) = \exists x\,(F_1(x) \vee F_2(x))$ — дистрибутивність для одного квантора, коли формули F_1, F_2 не мають кванторів (безкванторні формули)

- $\forall x\,(F(x)) \wedge \forall x\,(F(x)) = \forall x\,(F(x))$, $\quad \exists x\,(F(x)) \wedge \exists x\,(F(x)) = \exists x\,(F(x))$, $\quad \forall x\,(F(x)) \vee \forall x\, x(F(x)) = \forall x\,(F(x))$, $\quad \exists x\,(F(x)) \vee \exists x\,(F(x)) = \exists x\,(F(x))$ — ідемпотентність;

- $\forall x\,(F(x)) \vee \forall x\, \neg(F(x)) = 1$, $\quad \exists x\,(F(x)) \vee \exists x\,(F(x)) = 1$, — закон виключеного третього;

- $\forall x\,(F(x)) \wedge \neg \forall x\,(F(x)) = 0$, $\quad \exists x\,(F(x)) \wedge \neg \exists x\,(F(x)) = 0$, — закон суперечності;

- $\neg \forall x\,(F(x)) = \exists x \neg(F(x))$, $\quad \neg \exists x\,(F(x)) = \forall x \neg(F(x))$ — закони де Моргана;

- $\neg(\neg \forall x\,(F(x))) = \forall x\,(F(x))$, $\quad \neg(\neg \exists x\,(F(x))) = \exists x\,(F(x))$ — закони доповнення;

- $\forall x\,(F(x)) \vee 1 = 1$; $\quad \exists x\,(F(x)) \wedge 0 = 0$; $\quad \forall x\,(F(x)) \wedge 0 = 0$; $\quad \exists x\,(F(x)) \vee 1 = 1$ — властивості сталих 0,1.

Оскільки рівносильності стосуються інтерпретацій і моделей, то вивчення рівносильностей відноситься до семантики.

Коли розглядають перетворення формул логіки предикатів за допомогою основних рівносильностей, то кажуть про алгебру предикатів. Коли розглядають формули разом з аксомами і правилами доведеннями, розглядають доведення, то кажуть про числення предикатів.

7 Числення предикатів

Всі методи та результати числення висловлень можна перенести на числення предикатів, тобто кожна теорема і кожне доведення числення вислювлювань стає теоремою та доведенням числення предикатів, якщо всі пропозиційні символи замінити формулами мови предикатів (всі входження одного пропоозиційного символа потрібно заміняти однією формулою).

Для того, щоб формалізувати процес міркувань в численні п редикатів, потрібно відділити додаткові аксіоми та правила доведення, що враховують формули з кванторами.

Додаткові правила та аксіоми визначають можливості введення та знищенна (елімінації) определяют возможности кванторів, підстановки та зміни кванторів.

7.1 Правило підстановки терма замість вільної змінної

Візьмемо для прикладу формулу $((x^2 = x) \vee (x < 0) \wedge \exists x\,(\sin x = x)$. В цій формулі 6 разів зустрічається індивідна змінна x 3 рази в якості вільної змінної, 2 рази в якості зв'язаної змінної і 1 раз за знаком квантора. Кожен запис змінної називається входженням цієї змінної в формулу. Ця формула хоч і правильна, однак погана, бо в ній одна ізмінна і вільна і зв'язана. Щоб вона стала більш прийнятною, потрібно застосувати процедуру стандартизації, зв'язану змінну перейменувати — скажемо, на y.Одержимо формулу $((x^2 = x) \vee (x < 0) \wedge \exists y\, (\sin y = y)$ — це та ж сама формула (згадаємо домовленість про можливість таких дій), але вона має цілком прийнятний вигляд. Тут ми маємо два входження x в якості вільної змінної.

Зупинимося на підстановці замість вільної змінної терма, що не має входжень цієї зінної. Так терм $(\cos y + \sin z)$ не має в своєму записі змінної x. Результатом підстановки терма $t = (\cos y + \sin z)$ у формулу $A(x) = (x^2 = x) \vee (x < 0) \wedge \exists y\, (\sin y = y)$ замість змінної x буде формула

$$A(t) = (((\cos y + \sin z)^2) = (\cos y + \sin z)) \vee (\cos y + \sin z < 0) \wedge \exists y\, (\sin y = y). \tag{59}$$

В (59) тричі зустрічається знак рівності $=$. Перший знак є металогічним, він використаний як знак позначення (в програмуванні в таких випадках стало використовується двосимвольна комбінація $:=$). Другий та третій знаки $=$ в (59) є предикатними символами — вони використані для побудови формули.

Результат підстановки терма t в формулу $A(x)$ замість змінної x записуємо так, як прийнято при роботі з фінукціями в інших розділах математики, — у вигляді

$$A(t) = A(x)|_{x=t}\,.$$

Крім того, що терм t не повинен мати входження тієї змінної, яку він заміняє, змінні, що входять в терм не повинні попасти в область дії якогось квантора. Так у формулу $\forall z(P(x) \vee Q(z))$ заборонено підставляти z замість x.

7.2 Видозміни запису умовиводу

В численні предикатів, як і в численні висловлень умовиводи (неподільні одиниці міркувань) записуються у вигляді дробу, — в чисельнику стоять припущення, а в знаменнику висновок.

Інколи в записах використовують металогічний (не використовуваний при побудові формул) знак $\vdash$ [6], а інколи цього знаку уникають. В загальному випадку запис

$$A_1, , A_2, \ldots, A_n \vdash A$$

розуміємо і читаємо як “коли формули $A_1, , A_2, \ldots, A_n$ доведені, то формула A також доведена“. Коли знака $\vdash$ уникають, тоді те ж саме записують у вигляді

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow A.$$

Будемо вважати, що без знака $\vdash$ формули в доведеннях стають дуже довгими та поганочитабельними. Тому знак доведення будемо використовувати подібно до того, як він використовується в численні секвенцій.

Якщо зліва від знака $\vdash$ нічого не стоїть, то вважаться, що формула справа від нього доведена без будь-яких додакових припущень. Якщо ж справа від знака порожньо, то вважається що сукупність формул зліва суперечлива.

7.3 Додаткові правила доведення

Нижче x означає вільну індивідну змінну в формулі $A(x)$, t — терм, в який x не входить, і $A(t) = A(x)|_{x=t}$.

- Вввдення квантора загальності

$$\frac{\vdash A(t) \Rightarrow A(x)}{\vdash A(t) \Rightarrow \forall x\, A(x)}.$$

- Видалення квантора загальності

$$\frac{\vdash \forall x\, A(x)}{\vdash A(t)}.$$

[6]Знак $\vdash$ називають і знаком ввивідності, і штопором, і шваброю, і перпендикулярчиком — кому як подобається, загальновизнаної назви немає

- Введення квантора існування

$$\frac{\vdash A(t)}{\vdash \exists x\, A(x)}.$$

- Зміна кванторів

$$\frac{\vdash \forall x\, A(x)}{\vdash \neg(\exists x\, \neg A(x))} \qquad \frac{\vdash \exists x\, A(x)}{\vdash \neg(\forall x\, \neg A(x))}.$$

- Перенесення квантора

$$\frac{\vdash \forall x\, A(x) \vee B(t)}{\vdash \forall x\, (A(x) \vee B(t))}, \qquad \frac{\vdash \exists x\, A(x) \vee B(t)}{\vdash \exists x\, (A(x) \vee B(t))},$$

$$\frac{\vdash \forall x\, A(x) \wedge B(t)}{\vdash \forall x\, (A(x) \wedge B(t))}, \qquad \frac{\vdash \exists x\, A(x) \wedge B(t)}{\vdash \exists x\, (A(x) \wedge B(t))},$$

$$\frac{\vdash B(t) \Rightarrow \forall x\, A(x)}{\vdash \forall x\, (B(t) \Rightarrow A(x))}, \qquad ,\frac{\vdash B(t) \Rightarrow \exists x\, A(x)}{\vdash \exists x\, (B(t) \Rightarrow A(x))},$$

$$\frac{\vdash \forall x\, A(x) \Rightarrow B(t)}{\vdash\vdash \exists x\, (A(x) \Rightarrow B(t))}, \qquad \frac{\vdash \exists x\, A(x) \Rightarrow B(t)}{\vdash \forall x\, (A(x) \Rightarrow B(t))}$$

Підкреслимо найважливіші правила доведення, що стосуються також числення висловлень, — це правила modus[7] ponens[8] і правило modus tollens[9].

- Modus ponens

$$\frac{\vdash A, \quad \vdash A \Rightarrow B}{\vdash B}.$$

  Цей модус інколи називають конструктивним.

- Modus tollens

$$\frac{\vdash \neg B, \quad \vdash A \Rightarrow B}{\vdash \neg A}$$

  Цей модус інколи називають деструктивним, руйнівним.

[7] modus — норма, правило

[8] Слово ponens виводять від слова ponere — ставити, встановлювати, класти

[9] Слово tollens виводять від слова tollere — піднімати, знищувати

7.4 Логічні та позалогічні аксіоми

Аксіома в численні предикатів одна, та ж, що і в численні секвенцій чи в численні висловлень. Вона записується в одному із наступних виглядів

$$A \Rightarrow A, \qquad A \vdash A, \qquad \vdash A \Rightarrow A.$$

Однак в практичних застосуваннях, коли мається на увазі певна інтерпретація[10], використовують інші, додаткові аксіоми. Ці аксіоми називають позалогічними. Так можна взяти аксіомою

$$\forall x \forall y \, (x \cdot y = y \cdot x).$$

А можна аксіомою взяти

$$\exists x \, P(x),$$

що означає “на складі є соляна кислота“.

7.5 Доведення.

Доведення в будь-якій логіці, в будь-якому численні означає одне і те ж — це послідовність записів (формули, чи секвенцій). кожна з яких є або аксіомою в цій логіці, або одержується із попередніх записів за допомогою одного із правил доведення.

[10]інтерпретація — надання змісту, співсталяння символам, іменам конкретних речей. В булевих функціях — інтерпретація, це надання змінним істиносного значення

Покажчик